237

Exercices sur les nombres complexes

avec indications de solutions

PREFACE :

Cher lecteur,

Il me fait plaisir de vous présenter ce document d'exercices sur les nombres complexes avec des indications de solutions, conçu pour vous aider à renforcer et à développer vos compétences sur les nombres complexes. Que vous soyez un étudiant en mathématiques, un enseignant ou simplement quelqu'un qui cherche à améliorer sa compréhension des concepts mathématiques de base, ce document est fait pour vous.

Les nombres complexes, souvent perçus comme une abstraction mathématique déroutante, sont pourtant un outil indispensable dans de multiples domaines : des équations polynomiales à la physique quantique, en passant par l'ingénierie, le traitement du signal et bien d'autres disciplines. Leur maîtrise ouvre une porte vers une compréhension approfondie des phénomènes oscillatoires, des transformations géométriques et des systèmes dynamiques.

Ce document d'exercices a été conçu pour vous accompagner dans l'exploration de ce monde fascinant, en alliant rigueur mathématique et intuition pratique.

Organisé de manière objective, ce document propose une série d'exercices variés, classés par niveau de difficulté, en évitant tand bien que mal,les exercices classiques qu'on peut trouver dans tous les ouvrage scolaires, dans le but de vous aider à mieux maitriser ces concepts.

Les solutions, suivant la difficulté de l'exercice, ne se contentent pas de fournir des réponses, elles décrivent une méthodologie pas à pas, mettant en lumière les astuces et les liens entre les concepts. J' encourage les lecteurs à tenter de résoudre chaque exercice par eux-mêmes avant de consulter les corrections, afin de transformer chaque difficulté en opportunité d'apprentissage.

Mon objectif principal en vous proposant ce document est de vous aider à développer une approche solide et confiante envers les problèmes sur les complexes. Je crois fermement que la pratique régulière est la clé de la réussite en mathématiques, et ce document vous offre l'occasion de vous exercer de manière efficace et ciblée.

En conclusion, je vous souhaite beaucoup de succès dans votre parcours d'apprentissage. Que ce document vous guide et vous inspire dans votre quête de maîtrise des mathématiques.

Cordialement.

L'auteur : Mr. EL. LAABIYAD

Decembre 2025

EXERCICE1 : Calculer $z=\dfrac{(1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^{5}}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$

I.S : Sous la forme trigonométrique, on a : $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$, $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

et $-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

Donc $z=\dfrac{\cos\dfrac{55\pi}{3}+i\sin\dfrac{55\pi}{3}}{\cos\dfrac{40\pi}{3}+i\sin\dfrac{40\pi}{3}}=\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}}{-\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{4\pi}{3}}=-1$

EXERCICE2 : Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{12}$

I.S : on a $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=e^{-i\frac{\pi}{6}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$ *et* $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

donc $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

EXERCICE3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $iz+2\overline{z}=i-1$

I.S : on a $iz+2\overline{z}=i-1$ donc $-i\overline{z}+2z=-i-1$ soit que :

$-z+2i\overline{z}=-1-i$ et $-2i\overline{z}+4z=-2i-2$

puis en sommant les deux expressions , on trouve $3z=-3i-3$ soit que $z=-1-i$

EXERCICE4 : Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système : $\begin{cases} iz+(1-i)t=i\sqrt{3} \\ (1+i)z+2t=1+i\sqrt{3} \end{cases}$

I.S : le déterminant du système est $\Delta=-2+2i\neq 0$ donc le système admet un couple de solution unique (z,t) avec $z=\dfrac{(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\Delta}$ *et* $t=\dfrac{i\left(1+i\sqrt{3}\right)-i\sqrt{3}(1+i)}{\Delta}$

Soit $z=\dfrac{(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{-2(1-i)}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ *et* $t=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)(1-i)}{4}$

EXERCICE5 : Trouver les entiers naturels n tels que : $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=2$

I.S : si on pose $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, *on a* $j^3=1$

donc $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=2 \Leftrightarrow j^n+\overline{j}^n=2 \Leftrightarrow Re\left(j^n\right)=1 \Leftrightarrow Re\left(e^{i\frac{2n\pi}{3}}\right)=1$

donc $\frac{2n\pi}{3}\equiv 0 \quad [2\pi]$ soit que nécessairement $n\equiv 0 \quad [3]$

EXERCICE6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4=-7+24i$

I.S : on a $z^4=-7+24i=(3+4i)^2 \Leftrightarrow z^2=3+4i=(2+i)^2 \text{ ou } z^2=-3-4i=(-1+2i)^2$

$\Leftrightarrow \quad z=2+i \text{ ou } z=-2-i \text{ ou } z=-1+2i \text{ ou } z=1-2i$

EXERCICE7 : Déterminer le module et un argument de $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

I.S : on a $z^2=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=4e^{i\frac{\pi}{6}}=\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2$ donc $z=2e^{i\frac{\pi}{12}}$ *ou* $z=-2e^{i\frac{\pi}{12}}$

Mais de $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ on déduit que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs et

par suite $z=2e^{i\frac{\pi}{12}}$ soit que $|z|=2$ *et* $\arg z\equiv\frac{\pi}{12} \quad [2\pi]$

EXERCICE8: Déterminer le module et un argument de $z=1+i\left(1+\sqrt{2}\right)$

I.S : on rappelle que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $e^{ix}+e^{iy}=2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$

Donc $z=1+i\left(1+\sqrt{2}\right)=1+i+i\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{3\pi}{8}}$

Et donc $|z|=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $\arg z\equiv\frac{3\pi}{8} \quad [2\pi]$

EXERCICE9 : Montrer que pour tout nombre complexe qui n'est pas un réel négatif, on a :

$z=\left(\frac{z+|z|}{\sqrt{2\operatorname{Re}(z)+2|z|}}\right)^2$ en déduire les racine carrées de $5+12i$

I.S : on a $\left(z+|z|\right)^2=z^2+2z|z|+|z|^2=z\left(z+2|z|+\overline{z}\right)=z\left(2\operatorname{Re}(z)+2|z|\right)$

Si z n'est pas un réel négatif alors $\operatorname{Re}(z)+|z|\neq 0$ et donc $z=\left(\frac{z+|z|}{\sqrt{2\operatorname{Re}(z)+2|z|}}\right)^2$

Pour $z=5+12i$ on a $|z|=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$ donc $z=\left(\dfrac{5+13+12i}{\sqrt{2\cdot 5+2\cdot 13}}\right)^2=(3+2i)^2$

Soit que $3+2i\ \ et\ \ -3-2i$ sont les deux racines carrées de $5+12i$

Remarque : $|z|+\mathrm{Re}(z)=0\ \Leftrightarrow \begin{cases}|z|^2=\mathrm{Re}^2(z)\\ \mathrm{Re}(z)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{Im}(z)=0\\ \mathrm{Re}(z)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow\ z\in\mathbb{R}_-$

EXERCICE10 : Soit u un nombre complexe de module 1 . Montrer que : $Re\left(\dfrac{1}{1-u}\right)=\dfrac{1}{2}$

I.S : On a : $\dfrac{1}{1-u}+\overline{\left(\dfrac{1}{1-u}\right)}=\dfrac{1}{1-u}+\dfrac{1}{1-\overline{u}}=\dfrac{1}{1-u}+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{u}}=\dfrac{1}{1-u}-\dfrac{u}{1-u}=1$

Donc $2\,Re\left(\dfrac{1}{1-u}\right)=1$ ce qu'il fallait démontré.

EXERCICE11 : Posons $j=cos\dfrac{2\pi}{3}+i\,sin\dfrac{2\pi}{3}$. Calculer : $(1+\ j)(1+\ j^2)\ldots\ldots\ldots(1+\ j^{2025})$

I.S : notons que $j^3=1$, $1+j+j^2=0$ et que $2025=665\times 3$

Donc $(1+j)(1+j^2)\ldots\ldots\ldots(1+j^{2025})=\prod\limits_{k=0}^{k=664}\left(1+j^{3k+1}\right)\left(1+j^{3k+2}\right)\left(1+j^{3k+3}\right)$

$$=\prod_{k=0}^{k=664}(1+j)(1+j^2)(1+1)=\prod_{k=0}^{k=664}2(-j^2)(-j)=\prod_{k=0}^{k=664}2=2^{665}$$

EXERCICE12 : On pose $z=\sqrt{3}+i$, déterminer les entiers naturels n tels que z^n soit un réel.

I.S : on a $z=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $z^n=2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$ et ainsi $z^n\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{n\pi}{6}\equiv 0\ [\pi]\ \Leftrightarrow\ \exists k\in\mathbb{N}\ ;\ \dfrac{n\pi}{6}=k\pi$

Soit que n est un multiple de 6

EXERCICE13 : Trouver le nombre de couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant : $(a+ib)^{2025}=a-ib$

I.S : Posons $z=a+ib$, la relation donnée devient $z^{2025}=\overline{z}$ ce qui implique que $|z|\left(|z|^{2024}-1\right)=0$

Ainsi donc $|z|=0$ ce qui donne $(a,b)=(0,0)$

Ou $|z|=1$, or dans ce cas puisque $z^{2025}=\overline{z}$ alors $z^{2026}=|z|^2=1$ et cette équations admet 2026 solutions qui sont les racines (2026-ieme) d'ordre 2026 de l'unité.

Au total il y'a 2027 couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ qui vérifient cette relation.

EXERCICE14 : Soit z un nombre complexe non réel $\left(z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\right)$ et tel que $\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$

Montrer que : $|z| = 1$

I.S : On a $\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2} = 1+2\dfrac{z}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{z}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$

Puisque $\dfrac{1-z+z^2}{z} = -1+z+\dfrac{1}{z}$ alors $\dfrac{z}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z+\dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$

Soit que $z+\dfrac{1}{z} = \overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$ ou encore $\left(z-\overline{z}\right)\left(1-|z|^2\right) = 0$

Or $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ donc $z \neq \overline{z}$ et par suite $|z|^2 - 1 = 0$ soit que $|z| = 1$

EXERCICE15: Soit a, b, c trois nombres complexes.

Montrer que : $|a| + |b| + |c| \leq |a+b-c| + |a-b+c| + |-a+b+c|$

I.S : Posons $x = a+b-c$, $y = a+c-b$ et $z = -a+b+c$

On a alors : $a = \dfrac{x+y}{2}$, $b = \dfrac{x+z}{2}$ et $c = \dfrac{y+z}{2}$

donc $|a| \leq \dfrac{1}{2}\left(|x|+|y|\right)$, $|b| \leq \dfrac{1}{2}\left(|x|+|z|\right)$ et $|c| \leq \dfrac{1}{2}\left(|y|+|z|\right)$ soit que $|a|+|b|+|c| \leq |x|+|y|+|z|$ C.Q.F.D

EXERCICE16 : soit a, b, c trois nombres complexes de même module $r > 0$ et tel que $a+b+c \neq 0$

Montrer que $\left|\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right| = r$

I.S : remarquer que $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = r^2$

Donc $\left|\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right|^2 = \dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c} \cdot \dfrac{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}} = \dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c} \cdot \dfrac{\dfrac{r^2}{a}\cdot\dfrac{r^2}{b}+\dfrac{r^2}{b}\cdot\dfrac{r^2}{c}+\dfrac{r^2}{c}\cdot\dfrac{r^2}{a}}{\dfrac{r^2}{a}+\dfrac{r^2}{b}+\dfrac{r^2}{c}} = r^2$

EXERCICE17 : Soit a, b, c trois nombres complexes tels que : $a+b+c = ab+bc+ca = 0$

Montrer que a, b, c ont le même module.

I.S : d'après les formules de VIETTE les nombres a, b et c sont les solutions de l'équation :

$z^3 - 0\cdot z^2 + 0\cdot z - p = 0$ avec $p = abc$

ainsi donc $a^3 = p$, $b^3 = p$ et $c^3 = p$ soit que $a^3 = b^3 = c^3$, donc $|a|^3 = |b|^3 = |c|^3$

et donc a, b, c ont le même module.

EXERCICE18 : Calculer $|a-b|$ sachant que a et b sont deux nombres complexes de modules 1

et que $|a+b| = \sqrt{3}$

I.S : on a : $3 = |a+b|^2 = (a+b)\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = |a|^2 + |b|^2 + a\overline{b} + \overline{a}b = 2 + 2\operatorname{Re}\left(a\overline{b}\right)$

Donc $\mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right)=\frac{1}{2}$

Or $|a-b|^2=(a-b)\left(\bar{a}-\bar{b}\right)=|a|^2+|b|^2-\left(a\bar{b}+\bar{a}b\right)=2-2\mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right)=1$ donc $|a-b|=1$

EXERCICE19 : Soient $a\ ,b\ \ et\ \ c$ trois nombres complexes de module 1 tels que $ac\neq-1$

Montrer que $\dfrac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}$ est un imaginaire pur.

I.S : on rappelle que : $|z|=1\ \Leftrightarrow\ \bar{z}=\frac{1}{z}$

Par hypothèse on a : $\bar{a}=\frac{1}{a}$, $\bar{b}=\frac{1}{b}$ et $\bar{c}=\frac{1}{c}$, si on pose $z=\dfrac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}$ alors :

$$\bar{z}=\frac{\left(\bar{c}-\bar{b}\right)\left(1+\bar{a}\bar{b}\right)}{\bar{b}\left(1+\bar{a}\bar{c}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{a}\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{a}\frac{1}{c}\right)}=-\frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}=-z$$

Par suite $\dfrac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}$ est un imaginaire pur.

EXERCICE20 : Montrer que si $|z_1|=|z_2|=1$ et que $z_1z_2\neq-1$ alors $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est un réel

I.S : En effet, $|z_1|^2=|z_2|^2=1$ donc $\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$ et $\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$

par suite $\left(\overline{\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}}\right)=\dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}}=\dfrac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1z_2}}=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ donc $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est un réel.

EXERCICE21 : Montrer que si $\left(|z|=1\ \ et\ \ z\neq1\right)$ alors $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

I.S : on a : $\overline{\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)}=\dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}=\dfrac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}=-\dfrac{z+1}{z-1}$ car $\bar{z}=\frac{1}{z}$ et donc $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

EXERCICE22 : Montrer que pour tout nombre complexe z de module différent de 1 , on a :

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right|\leq\frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

I.S : si $|z|\neq1$ alors $z\neq1$ et donc $\dfrac{1-z^n}{1-z}=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}z^k$

En passant au module et en appliquant l'inégalité triangulaire, on trouve que :

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| = \left|\sum_{k=0}^{k=n-1} z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} |z|^k = \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

EXERCICE23 : Montrer que si z est un nombre complexe tel que :

$|z| = 1 \;\; et \;\; |1 + z + z^2 + ... + z^9| = 1$ alors $z^9 = 1 \;\; ou \;\; z^{11} = 1$

I.S : on a $z \neq 1$ et donc $|1 + z + z^2 + ... + z^9| = 1 \;\Leftrightarrow\; |z^{10} - 1| = |z - 1|$

$$\Leftrightarrow |z^{10} - 1|^2 = |z - 1|^2$$

$$\Leftrightarrow (z^{10} - 1)\left(\overline{z}^{10} - 1\right) = (z - 1)\left(\overline{z} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(z\overline{z}\right)^{10} - z^{10} - \overline{z}^{10} = z\overline{z} - z - \overline{z}$$

Or $|z| = 1$ donc $z\overline{z} = 1$ et $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ ce qui donne $z^{10} + \dfrac{1}{z^{10}} = z + \dfrac{1}{z}$ ou encore $z^{20} + 1 - z^{11} - z^9 = 0$

Soit que : $(z^{11} - 1)(z^9 - 1) = 0$ et donc $z^9 = 1 \;\; ou \;\; z^{11} = 1$

EXERCICE24 : Soient $x \;et\; y$ deux réels tels que :

$$56x + 33y = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad 33x - 56y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Déterminer $|x| + |y|$

I.S : si on pose $z = x + iy$, alors on a : $\dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{1}{z}$

On en déduit que $\dfrac{1}{z} = (33x - 56y) + i(56x + 33y) = (33 + 56i)z$ et donc $z^2 = \dfrac{1}{33 + 56i}$

Soit que $z = \pm\left(\dfrac{7}{65} - i\dfrac{4}{65}\right)$ et donc $|x| + |y| = \dfrac{11}{65}$

EXERCICE25 : Soient $\theta \in \mathbb{R} \;\; et \;\; \rho > 0$ avec $\rho e^{i\theta} \neq 1$.

On pose $z = \dfrac{1 + \rho e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}}$. Déterminer $Re(z) \;\; et \;\; Im(z)$

I.S : On a $z = \dfrac{1 + \rho e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}} = \dfrac{\left(1 + \rho e^{i\theta}\right)\left(1 - \rho e^{-i\theta}\right)}{\left(1 - \rho e^{i\theta}\right)\left(1 - \rho e^{-i\theta}\right)} = \dfrac{1 + \rho\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) - \rho^2}{1 - \rho\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) + \rho^2} = \dfrac{1 - \rho^2 + 2i\rho\, sin(\theta)}{1 + \rho^2 - 2\rho\, cos(\theta)}$

Par suite $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta)} \quad et \quad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{2\rho\sin(\theta)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta)}$

EXERCICE26 : Déterminer les nombres complexes a, b, c, d tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az + b = (cz + d)\overline{z}$

I.S : puisque $az + b = (cz + d)\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors $ax + b = (cx + d)x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Et donc le polynôme $cx^2+(d-c)x-b$ admet une infinité de solutions et donc il est identiquement nul.

Ainsi $d=a \ et \ c=b=0$

On a donc $az=a\bar{z}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$ ce qui donne $a=0$ et par suite $a=b=c=d=0$

EXERCICE27: Déterminer l'ensemble Γ des points $M(z)$ tels que : $Re\left(\frac{z-2}{z-1}\right)=0$

I.S : $M(z)\in\Gamma \iff \operatorname{Re}\left(\frac{z-2}{z-1}\right)=0 \iff \left(\overline{\frac{z-2}{z-1}}\right)=-\frac{z-2}{z-1} \iff (\bar{z}-2)(z-1)+(z-2)(\bar{z}-1)=0$

$\iff 2|z|^2-3(z+\bar{z})+4=0 \iff |z|^2-3\operatorname{Re}(z)+2=0$

Si on pose $z=x+iy \ avec \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$, on trouve $\Gamma=\{M\,(x,y)\,/\,x^2+y^2-3x+4=0\}$ c'est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{3}{2},0\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\frac{7}{4}}$

EXERCICE28 : Déterminer l'ensemble Δ des points $M(z)$ tels que : $\frac{1+\bar{z}}{z}\in\mathbb{R}$

I.S : $M(z)\in\Delta \iff \frac{1+\bar{z}}{z}\in\mathbb{R} \iff \left(\overline{\frac{1+\bar{z}}{z}}\right)=\frac{1+\bar{z}}{z} \iff z(1+z)=\bar{z}(1+\bar{z}) \iff z^2-\bar{z}^2+z-\bar{z}=0$

Si on pose $z=x+yi \ \ avec \ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$, alors :

$M(z)\in\Delta \iff y(2x+1)=0 \iff \operatorname{Re}(z)=\frac{-1}{2} \ ou \ \ z\in\mathbb{R}$

Soit que Δ est la réunion de l'axe des réels et la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$

EXERCICE29: Soit $a\,,b$ deux nombres complexes non nuls tels que $|a+b|=|a|=|b|$

Calculer $\frac{a}{b}$

I.S : posons $t=\frac{a}{b}\in\mathbb{C}$, on a donc $|a+b|=|a+at|=|a|=|at|$ soit que $|1+t|=|t|=1$ et donc $t\cdot\bar{t}=1$

De même on a $1=|1+t|^2=(1+t)(1+\bar{t})=1+t+\bar{t}+t\bar{t}$ et donc $1+t+\bar{t}=0$ ce qui donne $t^2+t+1=0$ puisque $\bar{t}=\frac{1}{t}$ ainsi donc t est une racine cubique de 1 non réelle. ($j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad et \ \ \bar{j}=j^2$)

Ainsi donc $\frac{a}{b}=j \ \ ou \ \ \frac{a}{b}=j^2$

EXERCICE30 : Soit $a\ et\ b$ deux nombres complexes de module 1 .

Montrer que $\left(\forall z\in\mathbb{C}\right)\ ;\ \ Re\left(\dfrac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b}\right)=-1$

I.S : soit $z\in\mathbb{C}$ et posons $Z=\dfrac{z-ab\overline{z}-a+b}{a-b}$

On a : $Z+\overline{Z}=\dfrac{z-ab\overline{z}-a+b}{a-b}+\dfrac{\overline{z}-\overline{a}\overline{b}z-\overline{a}+\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}$ puisque $|a|=|b|=1$ alors $\overline{a}=\dfrac{1}{a}\ \ et\ \overline{b}=\dfrac{1}{b}$

Ainsi $Z+\overline{Z}=\dfrac{z-ab\overline{z}-a+b}{a-b}+\dfrac{\overline{z}-\frac{1}{a}\frac{1}{b}z-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\dfrac{z-ab\overline{z}-a+b}{a-b}+\dfrac{ab\overline{z}+z-b+a}{b-a}=-2$

Et par suite $2\operatorname{Re}\left(Z\right)=-2$ soit que $\operatorname{Re}\left(Z\right)=-1$

EXERCICE31 : Trouver les nombres complexes vérifiant : $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{z}\right|=|z|=1$

I.S : si $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{z}\right|=|z|=1$ alors $\left|z^2+\overline{z}^2\right|=1$ car $z\overline{z}=|z|^2=1$ et donc $\left|2\operatorname{Re}\left(z^2\right)\right|=1$

si on pose $z=x+iy\ \ avec\ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ alors $\left|x^2-y^2\right|=\dfrac{1}{2}$

or $|z|=1$ donc on a aussi $x^2+y^2=1$

il s'agit donc de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}\left|x^2-y^2\right|=\dfrac{1}{2}\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ soit que $\begin{cases}x^2-y^2=\dfrac{1}{2}\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x^2-y^2=-\dfrac{1}{2}\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

ce qui donne :

$$\left(x,y\right)\in\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

soit que $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\ ,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\ ,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\ ,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\ ,\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

EXERCICE32 : Trouver la forme trigonométrique du nombre complexe $z=1+cos\,a\ +i\,sin\,a$ avec $a\in\left[0;2\pi\right[$

I.S : Le module est $|z|=\sqrt{\left(1+\cos a\right)^2+\sin a}=\sqrt{2\left(1+\cos a\right)}=\sqrt{4\cos^2\dfrac{a}{2}}=2\left|\cos\dfrac{a}{2}\right|$

L'argument de z est déterminé de la manière suivante :

(i) Si $a\in\left]0;\pi\right[$ alors $\dfrac{a}{2}\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc le point d'affixe $\left(1+\cos a\right)+i\sin a$ est situé sur le premier cadrant du plan complexe par suite $\arg z=\arctan\dfrac{\sin a}{1+\cos a}=\arctan\left(\tan\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a}{2}$

Et donc $z=2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2}+i\sin\frac{a}{2}\right)$

(ii) Si $a\in\left]\pi;2\pi\right[$ alors $\frac{a}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc le point d'affixe $(1+\cos a)+i\sin a$ est situé sur le quatrième cadrant du plan complexe par suite $\arg z=\arctan\frac{\sin a}{1+\cos a}+2\pi=\arctan\left(\tan\frac{a}{2}\right)+2\pi=\frac{a}{2}+\pi$

Et donc $z=-2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\left(\frac{a}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{a}{2}+\pi\right)\right)$

(iii) Si $a=\pi$ alors $z=0$ et donc n'admet pas de forme trigonométrique.

EXERCICE33 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant : $(S):\begin{cases} uv=1-8i \\ u^2+v^2=-2-16i \end{cases}$

I.S : on a $(S)\Leftrightarrow\begin{cases} uv=1-8i \\ (u+v)^2-2uv=-2-16i \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} uv=1-8i \\ (u+v)^2=-32i \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} uv=1-8i \\ (u+v)^2=(4(1-i))^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} uv=1-8i \\ u+v=\varepsilon 4(1-i) \end{cases}\ avec\ \varepsilon=\pm1$

Ainsi donc $\{u,v\}$ est l'ensemble des racines du polynôme : $x^2-\varepsilon 4(1-i)x+1-8i$

Ce qui donne $\{u,v\}=\{2-i,2-3i\}\ ou\ \{u,v\}=\{2+i,2+3i\}$

EXERCICE34 : Soient $z\ et\ t$ deux nombres complexes tels que : $|z+t|=\sqrt{3}\ et\ |z|=|t|=1$

Calculer $|z-t|$

I.S : On $|z+t|=\sqrt{3}\Leftrightarrow|z+t|^2=3\Leftrightarrow(z+t)(\bar{z}+\bar{t})=3$ ou encore $|z|^2+2Re(z\bar{t})+|t|^2=3$ soit que $2Re(z\bar{t})=1$

de même on a : $|z-t|^2=|z|^2-2Re(z\bar{t})+|t|^2$ et donc $|z-t|^2=2-2Re(z\bar{t})=1$ soit que $|z-t|=1$

EXERCICE35 : Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que : $Re(z)>1$ si et seulement si $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$

I.S : Remarquer que : $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow|2-z|<|z|\Leftrightarrow(2-z)(2-\bar{z})<z\cdot\bar{z}$

ce qui est équivalent à $4-2(z+\bar{z})<0$ ou encore que $4<2(z+\bar{z})=4Re(z)$ soit que $1<Re(z)$

EXERCICE36 : Soient $z\ ,t\ et\ s$ trois nombres complexes tels que : $|z|=|t|=|s|=R$

Montrer que : $|z-t||t-s|+|s-z||z-t|+|t-s||s-z|\leq 9R^2$

I.S : Remarquer que si $\alpha\ ,\beta\ et\ \lambda$ sont des réels positifs alors $\alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha\leq\alpha^2+\beta^2+\lambda^2$

Posons $\alpha=|z-t|$, $\beta=|t-s|$ *et* $\lambda=|s-z|$ alors

$$\alpha^2+\beta^2+\lambda^2=3\left(|z|^2+|t|^2+|s|^2-|z+t+s|^2\right)\leq \alpha^2+\beta^2+\lambda^2=3\left(|z|^2+|t|^2+|s|^2\right)=9R^2$$

ce qui donne $\alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha\leq 9R^2$

EXERCICE37: Soient u , v *et* w trois nombres complexes tels que : $u+v+w=0$ *et* $|u|=|v|=|w|=1$

Montrer que : $u^2+v^2+w^2=0$

I.S : On a : $u^2+v^2+w^2=(u+v+w)^2-2(uv+vw+wu)=-2uvw\left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}\right)$

$$=-2uvw\left(\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}\right)=-2uvw\left(\overline{u+v+w}\right)=0$$

EXERCICE38: Soient a *et* b deux nombres complexes tels que : $|a|=|b|=1$

Montrer que : $|a+1|+|b+1|+|ab+1|\geq 2$

I.S : On a : $|a+1|+|b+1|+|ab+1|\geq|a+1|+|ab+1-(b+1)|=|a+1|+|ab-b|=|a+1|+|b||a-1|$

$$=|a+1|+|a-1|\geq|(a+1)-(a-1)|=2$$

EXERCICE39 : Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}i\right\}$. Montrer que : $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right|\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|\leq\dfrac{1}{3}$

I.S : On a **:** on a : $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right|\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad |6z-i|\leq|2+3iz| \quad\Leftrightarrow\quad |6z-i|^2\leq|2+3iz|^2$

ou encore $(6z-i)(6\overline{z}+i)\leq(2+3iz)(2-3i\overline{z})$ soit que $36z\overline{z}+6iz-6i\overline{z}+1\leq 4-6i\overline{z}+6iz+9z\overline{z}$

ou encore $27z\overline{z}\leq 3$ ce qui est équivalent à $|z|\leq\dfrac{1}{3}$

EXERCICE40 : Soit a ,b ,c trois nombres complexes.

Montrer que si $|a|=|b+c|$, $|b|=|a+c|$ *et* $|c|=|a+b|$ alors $a+b+c=0$

I.S : on a $|a|^2+|b|^2+|c|^2=|b+c|^2+|a+c|^2+|a+b|^2$

donc $a\overline{a}+b\overline{b}+c\overline{c}=(b+c)(\overline{b}+\overline{c})+(a+c)(\overline{a}+\overline{c})+(b+a)(\overline{b}+\overline{a})$

ou encore $(a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})=0$ ce qui donne $|a+b+c|=0$ et donc $a+b+c=0$

EXERCICE41 : Soit k, n deux entiers strictement positifs et soit $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ des nombres complexes non nuls, de même module et tels que : $z_1^k + z_2^k + \ldots\ldots + z_n^k = 0$

Montrer que : $\dfrac{1}{z_1^k} + \dfrac{1}{z_2^k} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{z_n^k} = 0$

I.S : Posons $r = |z_1| = |z_2| = \ldots\ldots = |z_n|$ donc $\dfrac{1}{z_1^k} + \dfrac{1}{z_2^k} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{z_n^k} = \dfrac{\overline{z_1^k}}{r^{2k}} + \dfrac{\overline{z_2^k}}{r^{2k}} + \ldots\ldots + \dfrac{\overline{z_n^k}}{r^{2k}}$

$$= \frac{1}{r^{2k}}\left(\overline{z_1^k + z_2^k + \ldots\ldots + z_n^k}\right) = 0$$

EXERCICE42 : Montrer que si $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$ alors $|z| = 1$

I.S : L'équation peut être mise sous la forme : $z^9 = \dfrac{11 - 10iz}{11z + 10i}$

Si $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors $|z|^9 = \dfrac{\sqrt{11^2 + 220b + 10^2\left(a^2 + b^2\right)}}{\sqrt{11^2\left(a^2+b^2\right) + 220b + 10^2}}$

Posons $n(a,b)\, et\, d(a,b)$ le numérateur et le dénominateur de cette expression.

Si $|z| > 1$ alors $a^2 + b^2 > 1$ et donc $D(a,b) > N(a,b)$ soit que $|z|^9 < 1$ ce qui donne une contradiction.

Si $|z| < 1$ alors $a^2 + b^2 < 1$ et donc $D(a,b) < N(a,b)$ soit que $|z|^9 > 1$ ce qui donne une contradiction.

Par suite $|z| = 1$

EXERCICE43 : Soient $a \;\, et \;\, b$ deux nombres complexes tels que $a\overline{b} \neq 1$

Montrer que : $\left|\dfrac{a-b}{1-a\overline{b}}\right| = 1 \;\Leftrightarrow\; |a| = 1 \;\; ou \;\; |b| = 1$

I.S : On a : $\left|\dfrac{a-b}{1-a\overline{b}}\right| = 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{\left(\dfrac{a-b}{1-a\overline{b}}\right)} = \dfrac{1-a\overline{b}}{a-b} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{1-\overline{a}b} = \dfrac{1-a\overline{b}}{a-b}$

$\Leftrightarrow\; \left(\overline{a}-\overline{b}\right)(a-b) = \left(1-a\overline{b}\right)\left(1-\overline{a}b\right) \;\Leftrightarrow\; |a|^2 + |b|^2 = 1 + |a|^2|b|^2$

$\Leftrightarrow\; \left(|a|^2 - 1\right)\left(|b|^2 - 1\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; |a| = 1 \;\; ou \;\; |b| = 1$

EXERCICE44: Soient $a \;\, et \;\, b$ deux nombres complexes non nuls. Montrer que : $\left|\dfrac{a}{|a|^2} - \dfrac{b}{|b|^2}\right| = \dfrac{|a-b|}{|ab|}$

I.S : remarquons que si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Donc $\left|\dfrac{a}{|a|^2} - \dfrac{b}{|b|^2}\right| = \left|\overline{\dfrac{a}{|a|^2} - \dfrac{b}{|b|^2}}\right| = \left|\dfrac{\overline{a}}{|a|^2} - \dfrac{\overline{b}}{|b|^2}\right| = \left|\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{|a-b|}{|ab|}$

EXERCICE45 : Soient $a \ et \ b$ deux nombres complexes de module 1 .
Montrer que : $|ab+bc+ca| = |a+b+c|$

I.S : on a $|abc| = |a||b||c| = 1$ donc $|ab+bc+ca| = \left|\dfrac{ab+bc+ca}{abc}\right| = \left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right| = \left|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right| = |a+b+c|$

puisque $|z| = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

EXERCICE46 : Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, montrer que : $\lambda \in \mathbb{R} \iff \left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$

I.S : Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\overline{\left(\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right)} = \dfrac{1-\lambda i}{1+\lambda i} = \left(\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right)^{-1}$ donc $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$

Réciproquement, si $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$ alors $\left|\dfrac{i-\lambda}{i+\lambda}\right| = 1$ soit que $|\lambda - i|^2 = |\lambda + i|^2$ donc

$(\lambda+i)\left(\overline{\lambda}-i\right) = (\lambda-i)\left(\overline{\lambda}+i\right)$ ce qui donne : $\overline{\lambda} = \lambda$ et donc $\lambda \in \mathbb{R}$

EXERCICE47 : Montrer que pour tout nombre complexe z , si $\left|z-\dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ alors $\left|z(1-z)-\dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$

I.S : on a sous la forme canonique , $z(1-z) = \dfrac{1}{4} - \left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2$

Et donc $\left|z(1-z)-\dfrac{1}{2}\right| = \left|-\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right| \leq \left|\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2\right| + \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{2}$

EXERCICE48 : Soient $a \ et \ b$ deux nombres complexes.
Montrer que : $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$

I.S : on a : $\left(|a+b|+|a-b|\right)^2 = |a+b|^2 + |a-b|^2 + 2\left|a^2-b^2\right|$

$$= (a+b)\left(\overline{a}+\overline{b}\right) + (a-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) + 2\left|a^2-b^2\right|$$

$$= |a|^2 + a\overline{b} + \overline{a}b + |b|^2 + |a|^2 - a\overline{b} - \overline{a}b + |b|^2 + 2\left|a^2-b^2\right|$$

Et donc $\left(|a+b|+|a-b|\right)^2 - \left(|a|+|b|\right)^2 = 2\left|a^2-b^2\right| + \left(|a|-|b|\right)^2 \geq 0$ soit que $|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$

EXERCICE49 : Soit $z \in \mathbb{C}$ de module 1 . Montrer que si $|1+z| < 1$ alors $\left|1+z^2\right| > 1$

I.S : on pose : $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ donc $|1+z| = \left|2\cos\dfrac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$

ainsi $|1+z| < 1 \iff -\dfrac{1}{2} < \cos\dfrac{\theta}{2} < \dfrac{1}{2}$ soit que $\pi - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\theta}{2} < \pi + \dfrac{\pi}{6}$ modulo 2π

de même on a $\left|1+z^2\right| = 2|\cos\theta| > 1$ puisque $-\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ modulo 2π

EXERCICE50 : Montrer que si $a\ et\ b$ sont deux nombres complexes de même module supérieur à 1 alors : $|a+b|\geq 1 \quad ou \quad |a^2+b^2|>1$

I.S : On a : $|a+b|=|a|\left|1+\frac{b}{a}\right| \quad et \quad |a^2+b^2|=|a^2|\left|1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right|$

Si on pose $z=\frac{b}{a}$ on aura bien $|z|=1$ et donc d'après l'exercice précèdent, $|1+z|>1 \quad ou \quad |1+z^2|>1$

Soit que puisque $|a|=|b|>1$ on a : $|a+b|\geq 1 \quad ou \quad |a^2+b^2|>1$

EXERCICE51 : Soient $u\ et\ v$ deux nombres complexes et on pose $z=u+iv$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $|z|^2=u^2+v^2$

I.S : on a $|z|^2=(u+iv)(\overline{u}-i\overline{v})$ et $u^2+v^2=(u+iv)(u-iv)$

Ainsi $|z|^2=u^2+v^2 \Leftrightarrow (u+iv)(\overline{u}-i\overline{v})=(u+iv)(u-iv) \Leftrightarrow (u+iv)(u-\overline{u}-i\overline{v}+iv)=0$

$\Leftrightarrow u+iv=0 \quad ou \quad i\,\mathrm{Im}(u)=-\mathrm{Im}(v) \Leftrightarrow z=0 \quad ou \quad \mathrm{Im}(u)=\mathrm{Im}(v)=0$

En conclusion une C.N.S d'avoir $|z|^2=|u|^2+|v|^2$ est $z=u=v=0$ ou $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

EXERCICE52: Soient un réel $a\geq 1$ et un nombre complexe z tel que : $|z+a|\leq a \quad et \quad |z^2+a^2|\leq a$

Montrer que : $|z|\leq a$

I.S : on a $2a|z|-|z+a|^2\leq \left|2a|z|-|z+a|^2\right|\leq \left|2az-(z+a)^2\right|\leq |z^2+a^2|\leq a$

On en déduit que $2a|z|\leq a+|z+a|^2\leq a+a^2$ donc $|z|\leq\frac{a+a^2}{2}\leq a$

EXERCICE53 : $n\,,a\,,b\,,p\,,c\ et\ d$ étant des entiers naturels. Montrer que si $n=a^2+b^2$ et $p=c^2+d^2$ alors leur produit $n\cdot p$ est aussi la somme de deux carrés d'entiers.

I.S : Posons $z=a+ib\ \ et\ t=c+id$

Alors $n=|z|^2 \quad et \quad p=|t|^2$ donc $np=|zt|^2$

Or $zt=(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc)$ donc $np=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

EXERCICE54 : Montrer que : $\sin 5t=16\sin^5 t-20\sin^3 t+5\sin t$

I.S : Utilisons la formule de MOIVRE pour développer $(\cos t+i\sin t)^5=\cos 5t+i\sin 5t$

et la formule binomiale pour obtenir : $(\cos t+i\sin t)^5=\sum_{k=0}^{k=5}\mathrm{C}_5^k\cos^k(t)(i\sin t)^{5-k}$

Ce qui donne $\sin 5t=5\cos^4 t\sin t-10\cos^2 t\sin^3 t+\sin^5 t$

EXERCICE55 : Montrer que : $cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

I.S : Posons $z=cos\frac{\pi}{11}+i\,sin\frac{\pi}{11}=e^{i\frac{\pi}{11}}$

donc $z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z^{11}-z}{z^2-1}=\frac{-1-z}{z^2-1}=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{11}}}$

puisque : $1-e^{i\frac{\pi}{11}}=-2i\,sin\frac{\pi}{22}e^{i\frac{\pi}{22}}$ alors $z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{1}{2\,sin\frac{\pi}{22}}ie^{-i\frac{\pi}{22}}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}cot\,an\frac{\pi}{22}$

et donc $cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11}=Re\left(-\frac{1}{2\,sin\frac{\pi}{22}}ie^{-i\frac{\pi}{22}}\right)=\frac{1}{2}$

EXERCICE56 : Calculer $P=cos\alpha\cdot cos2\alpha\cdot cos4\alpha$ où $\alpha=\frac{\pi}{9}$

I.S : Posons $z=cos\alpha+i\,sin\alpha$ alors $z^9=-1$ et $\overline{z}=cos\alpha-i\,sin\alpha$

et $cos\alpha=\frac{z^2+1}{2z}$, $cos2\alpha=\frac{z^4+1}{2z^2}$, $cos4\alpha=\frac{z^8+1}{2z^4}$ donc

$$P=\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)\cdot\left(\frac{z^4+1}{2z^2}\right)\cdot\left(\frac{z^8+1}{2z^4}\right)=\frac{z^{14}+z^{12}+z^{10}+z^8+z^6+z^4+z^2+1}{8z^7}$$

$$=\frac{z^{16}-1}{8z^7\left(z^2-1\right)}=\frac{-z^7-1}{8\left(z^9-z^7\right)}=\frac{-z^7-1}{8\left(-1-z^7\right)}=\frac{1}{8}$$

EXERCICE57: Soient x,y,z trois nombres réels tels que :

$\sin x+\sin y+\sin z=0$ et $\cos x+\cos y+\cos z=0$

Montrer que : $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0$ et $\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0$

I.S : Posons $z_1=\cos x+i\sin x$, $z_2=\cos y+i\sin y$ et $z_3=\cos z+i\sin z$

On a : $z_1+z_2+z_3=0$ et $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$

donc $z_1^2+z_2^2+z_3^2=\left(z_1+z_2+z_3\right)^2-2\left(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right)=-2\left(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\right)$

$$=-2z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=-2z_1z_2z_3\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)=-2z_1z_2z_3\left(\overline{z_1+z_2+z_3}\right)=0$$

Puisque $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ et donc $\frac{1}{z_i}=\overline{z_i}$ pour $i\in\{1,2,3\}$ et par suite :

$\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z+i\left(\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z\right)=0$ C.Q.F.D

EXERCICE58 : Montrer que $cos^2\alpha + cos^2 5\alpha + cos^2 7\alpha = \dfrac{3}{2}$ où $\alpha = \dfrac{\pi}{18}$

I.S : Posons $z = cos\alpha + i\,sin\alpha$, on a :

$$z^{18} = -1 \ \ et \ \ cos\alpha = \frac{z^2+1}{2z} \ \ , \ \ cos5\alpha = \frac{z^{10}+1}{2z^5} \ \ , \ \ cos7\alpha = \frac{z^{14}+1}{2z^7}$$

ainsi $cos^2\alpha + cos^2 5\alpha + cos^2 7\alpha = \left(\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2 + \left(\dfrac{z^{10}+1}{2z^5}\right)^2 + \left(\dfrac{z^{14}+1}{2z^7}\right)^2$

et $cos^2\alpha + cos^2 5\alpha + cos^2 7\alpha = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow z^{16} + 2z^{14} + z^{12} + z^{24} + 2z^{14} + z^4 + z^{28} + 2z^{14} + 1 = 6z^{14}$

soit que $z^{28} + z^{24} + z^{16} + z^{12} + z^4 + 1 = 0$ ou encore $z^{16} + z^{12} - z^{10} - z^6 + z^4 + 1 = 0$

puisque $z^{18} = -1$ et donc $\left(z^4+1\right)\left(z^{12}-z^6+1\right) = 0$ ou encore $\dfrac{\left(z^4+1\right)\left(z^{18}+1\right)}{z^6-1} = 0$ ce qui est vrai.

EXERCICE59 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $cos\,x + cos\,2x - cos\,3x = 1$

I.S : Posons $z = cos\,x + i\,sin\,x$ donc $cos\,x = \dfrac{z^2+1}{2z}$, $cos\,2x = \dfrac{z^4+1}{2z^2}$, $cos\,3x = \dfrac{z^6+1}{2z^3}$

l'équation devient $\dfrac{z^2+1}{2z} + \dfrac{z^4+1}{2z^2} - \dfrac{z^6+1}{2z^3} = 1$ soit que $z^4 + z^2 + z^5 + z - z^6 - 1 - 2z^3 = 0$

ou encore $\left(z^3+1\right)\left(z^3 - z^2 - z + 1\right) = 0$ et enfin on obtient $\left(z^3+1\right)\left(z-1\right)^2\left(z+1\right) = 0$

donc $z = 1$ ou $z = -1$ ou $z^3 = -1$ par conséquent :

$x \in \left\{2k\pi \setminus k \in \mathbb{Z}\right\}$ ou $x \in \left\{(2k+1)\pi \setminus k \in \mathbb{Z}\right\}$ $x \in \left\{\dfrac{(2k+1)\pi}{3} \setminus k \in \mathbb{Z}\right\}$

en conclusion : $x \in \left\{k\pi \setminus k \in \mathbb{Z}\right\}$ *ou* $x \in \left\{\dfrac{2k+1}{3}\pi \setminus k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCICE60 : Montrer que : $cos\dfrac{\pi}{7} - cos\dfrac{2\pi}{7} + cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$

(on montrera d'abord que si $|z| = 1$ *et* $z \neq 1$ alors $Re\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$)

I.S : si $z = \cos t + i\sin t$ avec $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ alors

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-\cos t) - i\sin t} = \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2} - 2i\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2} - i\cos\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{t}{2} + i\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Soit que $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$ et donc $Re\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$

Déduction : Posons $z=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$

On a donc $z^7+1=0$ soit que $(z+1)\left(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1\right)=0$

Or $z+1\neq 0$ donc $z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0$ soit que $z^3-z^2+z=\frac{1}{1-z^3}$

Or $cos\frac{\pi}{7}-cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}=Re\left(z^3-z^2+z\right)=Re\left(\frac{1}{1-z^3}\right)$

Puisque $\left|z^3\right|=1$ et que $z^3\neq 1$ alors $Re\left(\frac{1}{1-z^3}\right)=\frac{1}{2}$ et donc $cos\frac{\pi}{7}-cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

EXERCICE61 : Calculer la somme $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\,cos\,k\alpha$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in[0;\pi]$

I.S : Posons $z=cos\alpha+i\,sin\alpha$ et considérons la somme $T_n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\,sin\,k\alpha$

On a : $S_n+iT_n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^kz^k=(1+z)^n$ or $1+z=1+cos\alpha+i\,sin\alpha=2cos\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2}+i\,sin\frac{\alpha}{2}\right)$ donc

$(1+z)^n=\left(2cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\left(cos\frac{n\alpha}{2}+i\,sin\frac{n\alpha}{2}\right)$ et donc $S_n=Re(1+z)^n=\left(2cos\frac{\alpha}{2}\right)^n cos\frac{n\alpha}{2}$

EXERCICE62 : Pour un entier $n\geq 2$, calculer la somme $S=\sum_{k=0}^{k=n-1}(k+1)e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

I.S : posons $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ alors $S=\sum_{k=0}^{k=n-1}(k+1)\omega^k$ et

$$(1-\omega)S=\sum_{k=0}^{k=n-1}(k+1)\omega^k-\sum_{k=0}^{k=n-1}(k+1)\omega^{k+1}=\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega^k+\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(k\omega^k-(k+1)\omega^{k+1}\right)=-n\omega^n=-n$$

Car $\omega^n=1$ et $\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega^k=0$ et par suite $S=\frac{n}{\omega-1}$

EXERCICE63 : Soit un entier $n\geq 2$. Calculer la somme $S=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1\right|^2$

I.S : on a $S=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1\right|^2=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left|e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)\right|^2=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left|e^{i\frac{k\pi}{n}}2i\,sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|^2=\sum_{k=0}^{k=n-1}sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

$$=2\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=2n-2\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right)=2n$$

EXERCICE64 : Soient $p\ et\ q$ deux nombres complexes avec $q \neq 0$. Montrer que si les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + pz + q = 0$ ont le même module alors $\frac{p}{q}$ est un réel.

I.S : Soient $z_1\ et\ z_2$ les deux racines de l'équation et posons $r = |z_1| = |z_2|$

alors $\frac{p^2}{q^2} = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2 = \frac{z_1\overline{z_2}}{r^2} + \frac{z_2\overline{z_1}}{r^2} + 2 = 2 + \frac{2}{r} Re\left(\frac{z_1\overline{z_2}}{r^2}\right)$

et donc $\frac{p^2}{q^2}$ est un réel et donc $\frac{p}{q}$ est un réel ou un imaginaire pur.

or $\frac{2}{r^2} Re\left(z_1\overline{z_2}\right) \geq -\frac{2}{r^2}\left|z_1\overline{z_2}\right| = -2$ donc $\frac{p^2}{q^2} \geq 0$ et par suite $\frac{p}{q}$ est un réel .

EXERCICE65 : Trouver tous les nombres complexes tels que : $|z| = 1$ et $\left|z^2 + \overline{z}^2\right| = 1$

I.S :L'équation $\left|z^2 + \overline{z}^2\right| = 1$ est équivalente à l'équation $\left|z^2 + \overline{z}^2\right|^2 = 1$

soit que $\left(z^2 + \overline{z}^2\right)^2 = 1$ ou encore $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 = 1$ ce qui est équivalent à $\left(z^4 + 1\right)^2 = z^4$

ou encore $\left(z^4 - z^2 + 1\right)\left(z^4 + z^2 + 1\right) = 0$

Les solutions sont donc : $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} i \quad et \quad \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

EXERCICE66 : Trouver tous les nombres complexes z tels que : $z^3 = \overline{z}$

I.S : Remarquer que si z est solution de cette équation alors $\left|z^3\right| = \left|\overline{z}\right|$ soit que $|z|^3 = |z|$ et donc nécessairement $|z| = 0\ ou\ |z| = 1$

Si $|z| = 0$ alors $z = 0$ et il est bien solution de cette équation

Si $|z| = 1$ alors l'équation est équivalente à $z^4 = 1$ puisque $\overline{z} = \frac{1}{z}$ et donc z est une racine 4-eme de l'unité. Les solutions sont donc $0\ ,1\ ,-1\ ,i\ et\ -i$

EXERCICE67 : Trouver tous les réels m pour lesquels l'équation $z^3 + (3+i)z^2 - (m+i) = 0$ admet au moins une solution réelle.

I.S : Si l'équation admet une solution réelle λ alors : $\lambda^3 + (3+i)\lambda^2 - (m+i) = 0$ donc

$\lambda^3 + 3\lambda^2 - m + \left(\lambda^2 - 1\right)i = 0$ soit que $\lambda^3 + 3\lambda^2 - m = 0\ \ et\ \ \lambda^2 - 1 = 0$

pour $\lambda = -1$ on trouve $m = 2$ et pour $\lambda = 1$ on trouve $m = 4$

EXERCICE68 : Soit $n>2$ un entier. Trouver le nombre de solutions de l'équation : $z^{n-1}=i\overline{z}$

I.S : Remarquer que si z est une solution de l'équation alors $|z|^{n-1}=|z|$ et donc $|z|=0 \quad ou \quad |z|=1$

Si $|z|=0$ alors $z=0$ et 0 est bien solution de l'équation

Si $|z|=1$ alors l'équation est équivalente à $z^n=i|z|^2=i$ et donc les n racines énième de i sont solutions de l'équation.

Au total l'équation admet $n+1$ solutions.

EXERCICE69 : Soient $x_1 \; et \; x_2$ les deux solutions de l'équation $x^2-x+1=0$.

Calculer $x_1^n+x_2^n$ pour $n\in\mathbb{N}$

I.S : on a $x_i^2-x_i+1=0 \Rightarrow x_i^3=x_i^2-x_i=-1$ pour $i\in\{1,2\}$ donc $x_1^3=x_2^3=-1$ et $x_1^6=x_2^6=1$

Donc $x_1+x_2=1$, $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(1)^2-2\cdot 1=-1$, $x_1^3+x_2^3=-2$, $x_1^4+x_2^4=-x_1-x_2=-1$

$x_1^5+x_2^5=-x_1^2-x_2^2=1$, $x_1^6+x_2^6=2$

Et pour tout $n\geq 7$, on a $x_1^n+x_2^n=\begin{cases} 1 \; si \; n\equiv 1 \; ou \; 5 \; [6] \\ -1 \; si \; n\equiv 2 \; ou \; 4 \; [6] \\ 2 \; si \; n\equiv 0 \; [6] \\ -2 \; si \; n\equiv 3 \; [6] \end{cases}$

EXERCICE70 : Factoriser le polynôme x^4+x^2+1

I.S : Posons $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, on a : $j^3=1$ et $j^2=\overline{j}$ et $1+j+j^2=0$ donc :

$$x^4+x^2+1=x^4-(j+j^2)x^2+j^3=(x^2-j)(x^2-j^2)=\left(x^2-\frac{1}{j^2}\right)(x^2-j^2)$$

$$=(x-j)(x+j)(x-\overline{j})(x+\overline{j})$$

EXERCICE71 : Trouver toutes les équations quadratiques à coefficients réels qui admet pour racine le nombre complexe $\alpha=i^{51}+2i^{80}+3i^{45}+4i^{38}$

I.S : On cherche $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\left(i^{51}+2i^{80}+3i^{45}+4i^{38}\right)^2+a\left(i^{51}+2i^{80}+3i^{45}+4i^{38}\right)+b=0$

Soit que $\left(i^3+2+3i+4i^2\right)^2+a\left(i^3+2+3i+4i^2\right)+b=0$ donc $(-2+2i)^2+a(-2+2i)+b=0$

Ou encore $(2a-8)i+b-2a=0$

on trouve $(a,b)=(4,8)$ et donc l'équation est : $x^2+4x+8=0$

EXERCICE72 : Pour $n\in\mathbb{N} \; et \; n\geq 2$, résoudre l'équation $(z-i)^n=1$

I.S : on a $(z-i)^n=1 \Leftrightarrow \exists k\{0,1,....,n-1\} \; ; \; z-i=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

$$\Leftrightarrow \exists k\{0,1,....,n-1\} \; ; \; z=e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k\{0,1,....,n-1\} \; ; \; z = 2\cos\left(\frac{\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}}{2}\right)e^{i\frac{\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k\{0,1,....,n-1\} \; ; \; z = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi donc les solutions de l'équation sont les nombres complexes :

$z_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}}$ avec $k\{0,1,....,n-1\}$

EXERCICE73 : Considérons l'équation quadratique suivante : $a^2z^2 + abz + c^2 = 0$ avec $a,b,c \in \mathbb{C}^*$

On note $z_1 \, et \, z_2$ ses deux racines.

Montrer que si $\frac{b}{c}$ est un nombre réel, alors $|z_1| = |z_2|$ ou $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$

I.S : Posons $t = \frac{b}{c} \in \mathbb{R}$ donc $b = tc$ et le discriminant de l'équation est $\Delta = (ab)^2 - 4a^2c^2 = a^2c^2(t^2-4)$

Si $|t| \geq 2$ les solutions de l'équation sont : $z_1 = \frac{-tac + ac\sqrt{t^2-4}}{2a^2}$ $\quad et \quad$ $z_2 = \frac{-tac - ac\sqrt{t^2-4}}{2a^2}$ et il est évident que $\frac{z_1}{z_2}$ est un nombre réel.

Si $|t| < 2$ les solutions de l'équation sont : $z_1 = \frac{c}{2a}\left(-t + i\sqrt{4-t^2}\right)$ $et \; z_2 = \frac{c}{2a}\left(-t - i\sqrt{4-t^2}\right)$ et il est évident que $|z_1| = |z_2|$

EXERCICE74 : Soit a, b, c trois nombres complexes non nuls , de même module.

Montrer que si $az^2 + bz + c = 0$ alors $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

I.S : Posons $r = |a| = |b| = |c|$

On a $|az^2| = |bz + c| \leq |b||z| + |c|$ donc $r|z^2| \leq r|z| + r$ soit que $|z|^2 - |z| - 1 \leq 0$ et donc $|z| \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

De même on a $|c| = |az^2 + b| \leq |a||z|^2 + |b||z|$ soit que $|z|^2 + |z| - 1 \geq 0$ et donc $|z| \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

En conclusion on a : $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq |z| \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

EXERCICE75 : Soit b, c deux nombres complexes tels que $|b| + |c| < 1$

Montrer que les modules des racines de l'équation $z^2 + bz + c = 0$ sont inférieurs à 1

I.S : Posons $z_1 \; et \; z_2$ les deux racines de l'équation.

on a : $z_1+z_2=-b$ et $z_1z_2=c$ donc l'inégalité $|b|+|c|<1$ implique que $|z_1+z_2|+|z_1z_2|<1$

or $\left||z_1|-|z_2|\right|\leq |z_1+z_2|$ donc $|z_1|-|z_2|+|z_1||z_2|-1<0$ si et seulement si $(|z_1|-1)(|z_2|+1)<0$

et $|z_2|-|z_1|+|z_2||z_1|-1<0$ si et seulement si $(|z_2|-1)(|z_1|+1)<0$

par conséquent $|z_1|<1$ et $|z_2|<1$

EXERCICE76 : Soit $a\,,b$ deux nombres complexes.

Montrer que si l'équation $x^2+ax+b=0$ admet deux racines de modules 1 alors l'équation $x^2+|a|x+|b|=0$ admet deux racines de modules 1

I.S : Soient $x_1\, et\, x_2$ les deux racines du polynôme $P(x)=x^2+ax+b$

Puisque $x_1\cdot x_2=b$ et $x_1+x_2=-a$ alors $|b|=|x_1|\cdot|x_2|=1$ et $|a|\leq|x_1|+|x_2|=2$

Le polynôme $Q(x)=x^2+|a|x+1$ a pour discriminant un réel $\Delta=|a|^2-4\leq 0$ donc ses deux racines sont

$$y_1=\frac{-|a|+i\sqrt{4-|a|^2}}{2}\quad et\quad y_2=\frac{-|a|-i\sqrt{4-|a|^2}}{2}$$ et par suite $|y_1|=|y_2|=\sqrt{\dfrac{(-|a|)^2+\left(4-|a|^2\right)}{4}}=1$

EXERCICE77 : Soit $a\,,b\,,c$ trois nombres complexes avec $a\neq 0$ .Montrer que si les racines de l'équation $az^2+bz+c=0$ ont même module alors $\overline{a}.b.|c|=|a|.\overline{b}.c$

I.S : Soit $z_1\, et\, z_2$ les deux racines de cette équation et posons $r=|z_1|=|z_2|$

La relation $\overline{a}\cdot b\cdot|c|=|a|\cdot\overline{b}\cdot c$ est équivalente à $\dfrac{\overline{a}\cdot b\cdot|c|}{\overline{a}\cdot a\cdot|a|}=\dfrac{|a|\cdot\overline{b}\cdot c}{\overline{a}\cdot a\cdot|a|}$ ou encore $\dfrac{b}{a}\cdot\left|\dfrac{c}{a}\right|=-\left(\dfrac{\overline{b}}{a}\right)\cdot\dfrac{c}{a}$

Donc $-(z_1+z_2)\cdot|z_1\cdot z_2|=-\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\cdot z_1\cdot z_2$ soit que $(z_1+z_2)r^2=|z_1|^2z_2+z_1|z_2|^2=(z_1+z_2)r^2$

Ce qui est toujours vrai.

EXERCICE78 : Soit $a\,,b$ les deux racines de l'équation $z^2+z+1=0$ et $c\,,d$ les deux racines de l'équation $z^2-z+1=0$.

Déterminer tous les entiers n tels que : $a^n+b^n=c^n+d^n$

I.S : si $z^2+z+1=0$ alors $z^3+z^2+z=0$ donc $z^3=1$

Et si $z^2-z+1=0$ alors $z^3-z^2+z=0$ donc $z^3=-1$

Ainsi donc $a^3=b^3=1$ et $c^3=d^3=-1$ et par suite $a^6=b^6=c^6=d^6=1$

Maintenant si $n=6k+r$ avec $r\in\{0,1,2,3,4,5\}$ alors $a^n+b^n=c^n+d^n \iff a^r+b^r=c^r+d^r$

Et on vérifie que $a^r+b^r=c^r+d^r$ pour $r\in\{0,2,4\}$

En conclusion il y'a égalité pour les entiers pairs seulement.

EXERCICE79: Résoudre l'équation $\left(z^2+3z-2\right)^2+\left(2z^2-3z+2\right)^2=0$

I.S : on a : $\left(z^2+3z-2\right)^2+\left(2z^2-3z+2\right)^2=0 \iff \left(z^2+3z-2\right)^2=i^2\left(2z^2-3z+2\right)^2$

$\Leftrightarrow\ \left[\left(z^2+3z-2\right)+i\left(2z^2-3z+2\right)\right]\left[\left(z^2+3z-2\right)-i\left(2z^2-3z+2\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow\ \left(z^2+3z-2\right)+i\left(2z^2-3z+2\right)=0\ \ ou\ \ \left(z^2+3z-2\right)-i\left(2z^2-3z+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\ (1+2i)z^2+(3-3i)z-2+2i=0\ \ ou\ \ (1-2i)z^2+(3+3i)z-2-2i=0$

Ce qui ramène le problème à la résolution de deux équations de second degré.

En conclusion, l'ensemble des solutions est $\left\{2i,-2i,\frac{3}{5}-i\frac{1}{5},\frac{3}{5}+i\frac{1}{5}\right\}$

EXERCICE80 : Résoudre l'équation $z^3+z^2+(-1+3i)z+44+12i=0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

I.S : Si $x\in\mathbb{R}$ est une solution de cette équation alors $x^3+x^2-x+44+i(3x+12)=0$ donc

$\begin{cases} x^3+x^2-x+44=0 \\ 3x+12=0 \end{cases}$ ce qui donne $x=-4$

Et on vérifie que $z=-4$ est bien solution de cette équation.

On factorise alors par $z+4$ et on obtient : $z^3+z^2+(-1+3i)z+44+12i=(z+4)\left(z^2-3z+11+3i\right)$

Puis on résout l'équation $z^2-3z+11+3i=0$

Remarque : $z^2-3z+11+3i=0\ \Leftrightarrow\ (2z-3)^2=(-3)^2-4(11+3i)=(1-6i)^2$

En conclusion l'ensemble des solutions est $\{-4,2-3i,1+3i\}$

EXERCICE81 : Résoudre l'équation $(E)\ ;\ z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

I.S : Si $z=ix\ \ (x\in\mathbb{R})$ est une solution de l' équation (E) alors :

$\left(x^2-3x-10\right)+i\left(-x^3+2x^2+3x-10\right)=0$ ce qui est équivalent au système

Soit que $x=-2\ ou\ x=5$

Réciproquement on vérifie que seule $x=-2$ est solution du système.

Ainsi donc la solution imaginaire de l'équation (E) est : $z=-2i$

On factorise ensuite par $z+2i$ pour obtenir : $(E)\ \Leftrightarrow\ (z+2i)\left(z^2-(1+4i)z-5(1-i)\right)=0$

On résout l'équation $z^2-(1+4i)z-5(1-i)=0$ dont le discriminant est $\Delta=5-12i=(3-2i)^2$ on trouve qu'elle admet deux racines : $-1+3i\ \ et\ \ 2+i$

En conclusion l'équation (E) admet trois racines : $-2i,-1+3i\ \ et\ \ 2+i$

EXERCICE82 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2+8|z|^2-3=0$

I.S : posons $z=x+iy\ \ avec\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Donc $4z^2+8|z|^2-3=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} 12x^2+4y^2-3=0 \\ 8xy=0 \end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} 12x^2+4y^2-3=0 \\ x=0\ \ ou\ \ y=0 \end{cases}$

Ce qui donne : $z=\frac{1}{2}$ ou $z=-\frac{1}{2}$ ou $z=\frac{i\sqrt{3}}{2}$ ou $z=-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE83 : On considère l'équation $(E)\ ;\ z^3+(a-3i)z-1-3i=0$ avec $a\in\mathbb{R}$

Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle.

I.S : Si x est une solution réelle de cette équation alors : $x^3+ax-1-3i(x+1)=0$

Et donc $x^3+ax+-1=0$ et $x+1=0$ ce qui donne $x=-1$ et $a=-2$

Et l'équation devient : $z^3-(2+3i)z-1-3i=0$ ce qui est équivalent à $(z+1)\left(z^2-z-(1+3i)\right)=0$

L'équation $z^2-z-(1+3i)=0$ dont le discriminant est $\Delta=5+12i=(3+2i)^2$ admet deux racines qui sont :

$z^{'}=\frac{-2-2i}{2}$ et $z^{"}=\frac{4+2i}{2}$

En conclusion l'équation (E) admet trois racines : -1 , $\frac{-1-2i}{2}$ et $\frac{4+2i}{2}$

EXERCICE84: Déterminer l'ensemble Γ des points $M\ (z)$ tel que : $\arg\left(\frac{z-1}{z-1-i}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$

I.S : considérons les points $A(1)$ et $B(1+i)$

On a $M(z)\in\Gamma \iff mes\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$ soit que BMA est un angle droit

et donc Γ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des deux points A et B

EXERCICE85 : Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{e}_1};\overrightarrow{\mathrm{e}_2}\right)$.

Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ du plan complexe tels que : $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\equiv 0\quad[2\pi]$

I.S : on a $M(z)\in E\iff\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\equiv 0\quad[2\pi]\iff\widehat{AMB}=0$

Avec A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe (i)

Ainsi donc E est la droite (AB) privé du segment ouvert $]AB[$

EXERCICE86 : Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{e}_1};\overrightarrow{\mathrm{e}_2}\right)$.

Déterminer l'ensemble F des points $M(z)$ du plan complexe tels que : $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\equiv 0\quad[\pi]$

I.S : on a $M(z)\in F\iff\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)\equiv 0\quad[\pi]\iff\widehat{AMB}=0$ ou $\widehat{AMB}=\pi$

Avec A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe (i)

c'est donc la droite (AB)

EXERCICE87 : Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2}\right)$.

Déterminer l'ensemble H des points $M(z)$ du plan complexe tels que :

les points $A(i)$, $M(z)$ et $M'(iz)$ soient alignés.

I.S : on a $M(z)\in H \Leftrightarrow \dfrac{z-iz}{z-i}\in\mathbb{R}$ ou $z=i$

si $z=i$ alors $iz=-1$ et $A=M$ et donc les trois points sont alignés.

Si $z\neq i$, alors $M(z)\in H \Leftrightarrow \dfrac{z-iz}{z-i}=\dfrac{\overline{z}+i\overline{z}}{\overline{z}+i} \Leftrightarrow (z-iz)\left(\overline{z}+i\right)=(z-i)\left(\overline{z}+i\overline{z}\right)$

$$\Leftrightarrow\ 2iz\overline{z}-i\overline{z}+\overline{z}-z-iz=0\ \Leftrightarrow\ |z|^2-\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}(z)=0$$

On pose $z=x+iy\ \ avec\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ alors $M(z)\in H \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y=0$

Soit que $M(z)\in H \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

c'est donc le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE88 : Dans le plan complexe, soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ les sommets d'un triangle.

a) Montrer que ABC est équilatéral direct si est seulement si $a+jb+j^2c=0$

b) Montrer que ABC est équilatéral si est seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

I.S : a) le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si B est l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ soit que $b-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-c)$ ce qui est équivalent à $jb-jc=-a+c$

Soit que $jb-(1+j)c+a=0$ ou encore $a+jb+j^2c=0$

b) le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $AB=AC\ \ et\ \ \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\pm\dfrac{\pi}{3}$ soit que

$$|b-a|=|c-a|\quad et\quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

Ainsi ABC équilatéral $\Leftrightarrow\ \dfrac{c-a}{b-a}=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\ \Leftrightarrow\ \left(\dfrac{c-a}{b-a}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(\dfrac{c-a}{b-a}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\ \left((c-a)+j^2(b-a)\right)\left((c-a)+j(b-a)\right)=0\quad \text{où}\ \ j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\ \left(c+j^2b+ja\right)\left(c+jb+j^2a\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$$

On rappelle que : $j^3=1\ \ et\ \ 1+j=-j^2$

EXERCICE89 : Soient $A(a), B(b)\ et\ C(c)$ trois points non alignés du plan complexe.

Montrer que : ABC est équilatéral si et seulement si $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{c-b}{a-b}$

I.S : ABC est équilatéral $\Leftrightarrow$ $|b-a| = |c-b| = |a-c|$ et $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)\ [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \left|\frac{c-b}{a-b}\right| \quad et\ \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)\ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} = \frac{c-b}{a-b}$$

EXERCICE90: Soient $A(a), B(b), C(c)$ trois points du plan complexe.

Montrer que si $a^2 = bc$ et $b^2 = ac$ alors le triangle ABC est équilatéral.

I.S : on a $a^2b^2 = abc^2$ et donc $c^2 = ab$ par conséquent $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

Et donc le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE91 : Soient $A(a), B(b), C(c)$ trois points du plan complexe.

Montrer que si $|a| = |b| = |c|$ et $a + b + c = 0$ alors le triangle ABC est équilatéral.

I.S : on rappelle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ on a : $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2\left(|x|^2 + |y|^2\right)$

De $a+b+c=0$ on déduit que $a+b=-c$ donc $|a+b| = |c|$

Puisque $|a| = |b| = |c|$ alors $|a-b|^2 = 3|a|^2$ et par analogie, on obtient $|b-c|^2 = 3|a|^2$ et $|c-a|^2 = 3|a|^2$

Ainsi donc $|a-b| = |b-c| = |c-a|$ et donc le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE92 : Montrer que les triangles $A(a)B(b)C(c)\ \ et\ M(m)N(n)K(k)$ sont semblables de même sens (resp. de sens contraire) si et seulement si : $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{n-m}{k-n}$ (resp. $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{\overline{n}-\overline{m}}{\overline{k}-\overline{n}}$)

ou $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ m & n & k \end{vmatrix} = 0$

I.S : les triangles $ABC\ et\ MNK$ sont semblables de même sens si et seulement si

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{MN}{MK}\ et\ \widehat{BAC} = \widehat{NMK}$ ce qui est équivalent à $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \left|\dfrac{n-m}{k-m}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{n-m}{k-m}\right)\ [2\pi]$

Soit que $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{n-m}{k-m}$ ou encore $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ m & n & k \end{vmatrix} = 0$

EXERCICE93 : Soit $OAB, OCD, et\, OEF$ trois triangles équilaterales donnés.
Montrer que les milieux des segments $[BC],[DE]\ et\ [FA]$ sont les sommets d'un triangle équilaterel.

I.S : supposons que le plan complexe est d'origine le point O et notons M, N, P les milieux des segment $[BC],[DE]\ et\ [FA]$ respectivement. de soit a,b,c,d,e,f,m,n,p les affixes des points A,B,C,D,E,F,M,N,P respectivement.

si on applique les formules de la rotation et qu'on pose $\varepsilon = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $\varepsilon^2 = j$ et $\varepsilon^4 = j^2$ de plus

$b = \varepsilon a$, $d = \varepsilon c$, $f = \varepsilon e$ et $m = \dfrac{b+c}{2} = \dfrac{\varepsilon a + c}{2}$, $n = \dfrac{d+e}{2} = \dfrac{\varepsilon c + e}{2}$, $p = \dfrac{f+a}{2} = \dfrac{\varepsilon e + a}{2}$

Or $m + jn + j^2 p = m + \varepsilon^2 n + \varepsilon^4 p = m + \varepsilon^2 n - \varepsilon p = \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon a + c - c + \varepsilon^2 e - \varepsilon^2 e - \varepsilon a\right) = 0$

donc MNP équilateral.

EXERCICE94: à l'extérieur d'un triangle ABC on construit les triangles ABR , $BCP\ et\ CAQ$ tels que :

$$mes\left(\widehat{PBC}\right) = mes\left(\widehat{CAQ}\right) = \frac{\pi}{4} \quad , \quad mes\left(\widehat{BCP}\right) = mes\left(\widehat{QCA}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ et } mes\left(\widehat{ABR}\right) = mes\left(\widehat{RAB}\right) = \frac{\pi}{12}$$

Montrer que : $mes\left(\widehat{QRP}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et que $RQ = RP$

I.S : Considérons le plan complexe avec l'origine du repère au point R et soit M le pied de la perpendiculaire issue de P sur la droite (BC) et notons par $a,b,c,r,p,m\ et\ q$ les affixes respectives des point $A,B,C,R,M,P\ et\ R$

On a $MP = MB\ et\ \dfrac{MC}{MP} = \sqrt{3}$ donc $\dfrac{p-m}{b-m} = i\ \ et\ \ \dfrac{c-m}{p-m} = i\sqrt{3}$

et par suite $p = \dfrac{c + b\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{b-c}{1+\sqrt{3}} i \quad et \quad q = \dfrac{c + a\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{a-c}{1+\sqrt{3}} i$

le point B est l'image du point A par la rotation de centre R(origine du repère) et d'angle $\theta = 150°$ donc $b = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i\right) a$ et donc $\dfrac{p}{q} = i$ ce qui implique que $(QR) \perp (PR)$ et que $QR = PR$

EXERCICE95: Sur les côtés AB , $BC\ et\ CA$ d'un triangle ABC on construit trois triangles ADB , BEC , CFA semblables et de même orientation. Montrer que $ABC\ et\ DEF$ ont le même centre.

I.S : soient $a,b,c,d,e\ et\ f$ les affixes respectives des points $A,B,C,D,E\ et\ F$
Les triangles $ADB, BEC\ et\ CFA$ sont semblables de même orientation donc

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{CF}{CA}$ et $\widehat{BAD} = \widehat{CEB} = \widehat{ACF}$ donc

$\left|\dfrac{d-a}{b-a}\right| = \left|\dfrac{e-b}{c-b}\right| = \left|\dfrac{f-c}{a-c}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{d-a}{b-a}\right) = \arg\left(\dfrac{e-b}{c-b}\right) = \arg\left(\dfrac{f-c}{a-c}\right)\ [2\pi]$

Soit que : $\dfrac{d-a}{b-a}=\dfrac{e-b}{c-b}=\dfrac{f-c}{a-c}=z$

par conséquent $d=a+(b-a)z$, $e=b+(c-b)z \ \ et \ \ f=c+(a-c)z$

et donc $\dfrac{d+c+f}{3}=\dfrac{a+b+c}{3}$ soit que les deux triangles $ABC \ et \ DEF$ sont concentriques.

EXERCICE96: Soient $M \ ,N \ ,P$ les milieux des segments $[AB]$,$[BC]$,$[CA]$ d'un triangle ABC

Sur les médiatrices des segments $[AB]$,$[BC]$,$[CA]$ et à l'intérieur du triangle ABC , on choisi trois points C' ,A' ,B' tels que : $\dfrac{MC'}{AB}=\dfrac{NA'}{BC}=\dfrac{PB'}{CA}$

Montrer que $ABC \ et \ A'B'C'$ ont le même centre.

I.S : de l'expression $\dfrac{MC'}{AB}=\dfrac{NA'}{BC}=\dfrac{PB'}{CA}$ on déduit que $\tan\left(\widehat{C'AB}\right)=\tan\left(\widehat{A'BC}\right)=\tan\left(\widehat{B'CA}\right)$

Donc les triangles $AC'B, BA'C \ et \ CB'A$ sont semblables et donc d'après l'exercice précédent, ils ont le même centre.

EXERCICE97: à l'extérieur d'un triangle ABC on construit trois triangles équilatéraux $AC'B ,BA'C ,CB'A$

Montrer que les centres de ces triangles sont les sommets d'un triangle équilatéral.

I.S : on considère le plan complexe et soient $a,b,c,a',b' \ et \ c'$ les affixes respectifs des points $A,B,C,A',B' \ et \ C'$

$AC'B ,BA'C \ et \ CB'A$ sont équilatéraux donc avec $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on a :

$$a+jc'+j^2b=0 \ \ , \ \ b+ja'+j^2c=0 \ \ et \ \ c+jb'+j^2a=0$$

Les centres respectifs des triangles $AC'B ,BA'C \ et \ CB'A$ vérifient :

$a''=\dfrac{a'+b+c}{3}$, $b''=\dfrac{a+b'+c}{3}$ et $c''=\dfrac{a+b+c'}{3}$

Puisque $3\left(c''+ja''+j^2b''\right)=\left(b+ja'+j^2c\right)+\left(c+jb'+j^2a\right)j+\left(a+jc'+j^2b\right)=0$

Ce qui répond à notre question.

EXERCICE98 : Montrer que l'équation d'une droite dans le plan complexe est : $\alpha\cdot z+\overline{\alpha}\cdot\overline{z}+\beta=0$ avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$, $\beta\in\mathbb{R}$ et $z\in\mathbb{C}$

I.S : l'équation cartésienne d'une droite dans le plan est $ax+by+c=0 \ \ avec \ \ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \ \ et \ \ a^2+b^2\neq 0$

Si on pose $z=x+iy \ \ avec \ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ alors $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2} \ \ et \ \ y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Ainsi donc $a\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right)+b\left(\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right)+c=0$ soit que $z\left(\dfrac{a-ib}{2}\right)+\overline{z}\left(\dfrac{a+ib}{2}\right)+c=0$

Et en posant $\alpha=\dfrac{a-ib}{2}$, on obtient $\alpha\cdot z+\overline{\alpha}\cdot\overline{z}+\beta=0$

EXERCICE99 : Considérons deux droites $(D_1)\ et\ (D_2)$ d'équations respectivement :

$\alpha_1 \cdot z + \overline{\alpha_1} \cdot \overline{z} + \beta_1 = 0 \quad et \quad \alpha_2 \cdot z + \overline{\alpha_2} \cdot \overline{z} + \beta_2 = 0$

Montrer que :$(D_1)\ et\ (D_2)$sont parallèles si et seulement si $\dfrac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} = \dfrac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2}$

I.S : ona $(D_1) \parallel (D_2) \Leftrightarrow$ *elles ont même coéfficients directeurs*

Donc $\dfrac{\alpha_1 + \overline{\alpha_1}}{\alpha_1 - \overline{\alpha_1}} i = \dfrac{\alpha_2 + \overline{\alpha_2}}{\alpha_2 - \overline{\alpha_2}} i$ soit que $\dfrac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} = \dfrac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2}$

EXERCICE100 : Considérons deux droites $(D_1)\ et\ (D_2)$ d'équations respectivement :

$\alpha_1 \cdot z + \overline{\alpha_1} \cdot \overline{z} + \beta_1 = 0 \quad et \quad \alpha_2 \cdot z + \overline{\alpha_2} \cdot \overline{z} + \beta_2 = 0$

Montrer que : $(D_1)\ et\ (D_2)$sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} = -\dfrac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2}$

I.S : ona $(D_1) \parallel (D_2) \Leftrightarrow$ *le produit de leurs coéfficients directeurs est égal à* -1

Donc $\alpha_1\overline{\alpha_1} + \alpha_2\overline{\alpha_2} = 0$ soit que $\dfrac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} = -\dfrac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2}$

EXERCICE101: L'équation de la droite déterminer par les deux points $A(a)\ et\ B(b)$ est $\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$

I.S : dans le plan cartesien, l'équation de la droite déterminer par les deux points $A(x_1, y_1)\ et\ B(x_2, y_2)$

est $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$ ou encore $x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

Si on pose Si on pose $z_1 = x_1 + iy_1\ \ avec\ \ (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $z_2 = x_2 + iy_2\ \ avec\ \ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ alors

$x_1 = \dfrac{z_1 + \overline{z_1}}{2}\ \ et\ \ y_1 = \dfrac{z_1 - \overline{z_1}}{2i}$ et $x_2 = \dfrac{z_2 + \overline{z_2}}{2}\ \ et\ \ y_2 = \dfrac{z_2 - \overline{z_2}}{2i}$

Puis en remplaçant dans le déterminant, on obtient le résultat désiré.

EXERCICE102 : Soit ABC un triangle. Sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ on trace deux carrés de centre respectivement $D\ et\ E$ tel que les points $C\ et\ D$ se trouve du même côté de la droite (AB) et les points $A\ et\ E$ de côté opposé de la droite (BC) .

Montrer que l'angle que fait la droite (AC) avec la droite (DE) est de mesure $\dfrac{\pi}{4}$

I.S : on suppose que dans le plan complexe les nombres complexes $a,b,c,d\ et\ e$ sont les affixes des points $A,B,C,D\ et\ E$ respectivement.

la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point C en B donc $b=i(c-e)+e$ et donc $e=\frac{b-ic}{1-i}$

de la même manière on obtient $d=\frac{b-ia}{1-i}$

L'angle des deux droites $(AC)\ et\ (DE)$ est égal à :

$$\arg\frac{c-a}{e-d}=\arg\frac{(c-a)(1-i)}{b-ic-b+ia}=\arg\frac{1-i}{-i}=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$$

EXERCICE103 : Soit ABC un triangle équilatéral. Sur les côtés $[AB]\ et\ [BC]$ on trace, à l'extérieur du triangle ABC , deux triangles $ABN\ et\ ACM$ .Si $P\ ,Q\ et\ R$ sont les milieux des segments $[BC],[AM]et[AN]$ respectivement, montrer que le triangle PQR est équilatéral.

I.S : on considère que le plan complexe est d'origine le point A et soit $b,c,m,n,p,q\ et\ r$ les affixes des points $B,C,M,N,P,Q\ et\ R$ respectivement.

La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme $N\ en\ B$ et $C\ en\ M$

Si on pose $\varepsilon=e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $b=\varepsilon n\ et\ m=\varepsilon c$ donc $p=\frac{b+c}{2}$, $q=\frac{m}{2}=\frac{\varepsilon c}{2}$, $r=\frac{n}{2}=\frac{b}{2\varepsilon}=\frac{b\varepsilon^5}{2}=-\frac{b\varepsilon^2}{2}$

Et donc $p^2+q^2+r^2=pq+qr+rp$ ce qui prouve que le triangle PQR est équilatéral

EXERCICE104 : Soit $ABCDEF$ un hexagone inscriptible dans un cercle $C(O,R)$ et tel que : $AB=CD=EF=R$. Si $P\ ,Q\ et\ R$ sont les milieux des segments $[AB],[CD]et[EF]$ respectivement, Montrer que le triangle PQR est équilatéral.

I.S : considérons le plan complexe d'origine le centre O du cercle circonscrit à l'hexagone et soit $a,b,c,d,e\ et\ f$ les affixes des points $A,B,C,D,E\ et\ F$ respectivement.

Si on pose $\varepsilon=e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $b=\varepsilon a$, $d=\varepsilon c\ \ et\ \ f=\varepsilon e$

Les points $P\ ,Q\ et\ R$ ont pour affixes $p=\frac{\varepsilon a+c}{2}$, $q=\frac{\varepsilon c+e}{2}$ et $r=\frac{\varepsilon e+a}{2}$

Et donc $p^2+q^2+r^2=pq+qr+rp$ soit que PQR est un triangle équilatéral.

EXERCICE105 : Soit ABC un triangle. Sur les côtés $[AB]et[AC]$ et à l'extérieur de ABC , on trace deux carrés $ABDE\ et\ ACFG$. Si M est le milieu du segment$[BC]$, montrer que $(AM)\perp(EG)$ et que $EG=2AM$

I.S : considérons le plan complexe d'origine le centre A et soit $b,c,g,e\ et\ m$ les affixes des points $B,C,G,E\ et\ M$ respectivement.

On a $g=ic$, $e=-ib$ et $m=\dfrac{b+c}{2}$ et donc $\dfrac{m-a}{g-e}=\dfrac{-(b+c)}{2i(b+c)}=\dfrac{i}{2}$

Ainsi donc $2|m-a|=|e-g|$ et $\arg\left(\dfrac{m-a}{g-e}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ soit que $(AM)\perp(EG)$ et $EG=2AM$

EXERCICE106 : Soit ABC un triangle. Chacun des segments $[AB],[BC]et[CA]$ est divisé en trois parties de longueurs égales par les points $(M,N),(P,Q)$ et (R,S) respectivement. On construit ensuite et à l'extérieur du triangle ABC , les triangles équilatérales $MND,PQE\ et\ RSF$.
Montrer que le triangle DEF est équilatéral.

I.S : considérons le plan complexe, et soit a,b,c,m,n,p,q,r et s les affixes des points A,B,C,M,N,P,Q,R et S respectivement.

On a alors $m=\dfrac{2a+b}{3}$, $n=\dfrac{a+2b}{3}$, $p=\dfrac{2b+c}{3}$, $q=\dfrac{b+2c}{3}$, $r=\dfrac{2c+a}{3}$ et $s=\dfrac{c+2a}{3}$

Le point D est l'image du point M par la rotation de centre N et d'angle $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Donc $d=n+\varepsilon(m-n)=\dfrac{a+2b+\varepsilon(a-b)}{3}$ où $\varepsilon=e^{i\frac{\pi}{3}}$

De la même façon on obtient :

$e=q+\varepsilon(p-q)=\dfrac{b+2c+\varepsilon(b-c)}{3}$ et $f=s+\varepsilon(r-s)=\dfrac{c+2a+\varepsilon(c-a)}{3}$

Ainsi donc $\dfrac{f-d}{e-d}=\dfrac{c+a-2b+\varepsilon(b+c-2a)}{2c-a-b+\varepsilon(2b-a-c)}=\varepsilon$ et donc $FD=FE$ et $\widehat{FDE}=\dfrac{\pi}{3}$

Soit que DEF est un triangle équilatéral.

EXERCICE107 : soit ABC un triangle et n un entier supérieur ou égal à 3 .
Sur le côté $[BC]$ (respectivement $[AC]$ et $[AB]$) du triangle et à l'extérieur, on construit un polygone à n côtés dont $[BC]$ (respectivement $[AC]$ et $[AB]$) et de centre A' (respectivement B' et C')
Determiner n pour que $A'B'C'$ soit équilatéral.

I.S : onpose $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et soit r_1,r_2,r_3 les rotations d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ et de centre respectif A',B',C'

Ainsi $r_1(c)=b$, $r_2(a)=c$, $r_3(b)=a$ donc $b=\omega(c-a')+a'$, $c=\omega(a-b')+b'$, $a=\omega(b-c')+c'$

on en déduit $a'=\dfrac{b-\omega c}{1-\omega}$, $a'=\dfrac{c-\omega a}{1-\omega}$, $a'=\dfrac{a-\omega b}{1-\omega}$

ainsi $A'B'C'$ est équilatéral $\Leftrightarrow$ $\dfrac{b'-a'}{c'-a'}=\dfrac{c'-b'}{a'-b'}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{c-\omega a-b+\omega c}{a-\omega b-b+\omega c}=\dfrac{a-\omega b-c+\omega a}{a-\omega c-c+\omega a}$ $\Leftrightarrow$ $1+\omega+\omega^2=0$

$$\Leftrightarrow\ e^{i\frac{2\pi}{n}}+e^{i\frac{4\pi}{n}}=-1\ \Leftrightarrow\ 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)e^{i\frac{3\pi}{n}}=-1$$

Une condition necessaire est donc $\left|2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)e^{i\frac{3\pi}{n}}\right|=|-1|$ soit que $\left|\cos\frac{\pi}{n}\right|=\frac{1}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{n}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

Ou encore $n=3$

EXERCICE108 : Soit $ABCD$ un carré de langueur a et P un point du cercle inscrit dans le carré.
Calculer : $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$

I.S : considérons le plan complexe d'origine le centre O du cercle inscrit dans le carré et tel que les affixes des points $A,B,C\ et\ D$ soient respectivement : $z_A=a\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_B=a\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_C=-a\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_D=-a\frac{\sqrt{2}}{2}i$

et Soit $z_P=\frac{a}{2}e^{ix}$ l'affixe du point P

On a $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=|z_A-z_P|^2+|z_B-z_P|^2+|z_C-z_P|^2+|z_D-z_P|^2$

$$=\sum(z_M-z_P)\left(\overline{z_M}-\overline{z_P}\right)=.......=3a^2$$

EXERCICE109 : Sur les côtés $[AB]\ et\ [AD]$ d'un triangle ABD, on construit et à l'extérieur de ABD deux carrés $ABEF$ et $ADGH$ de centre $O\ et\ Q$ respectivement. Si M est le milieu du segment $[BD]$, montrer que OMQ est un triangle isocèle rectangle de sommet M

I.S : soit $a,b\ et\ d$ les affixes dans le plan complexe, des points $A,B\ et\ D$ respectivement.

Les formules de la rotation nous donne le résultat suivant : $\frac{a-z_O}{b-z_O}=\frac{d-z_Q}{a-z_Q}=i$

Donc $z_O=\frac{b+a+(a-b)i}{2}$ et $z_Q=\frac{a+d+(d-a)i}{2}$

Puisque l'affixe du milieu M est $z_M=\frac{b+d}{2}$ alors $\frac{z_O-z_M}{z_Q-z_M}=\frac{a-d+(a-b)i}{a-b+(d-a)i}=i$

Et donc $(QM)\perp(OM)$ et $OM=QM$

soit que OMQ est un triangle isocèle rectangle de sommet M

EXERCICE110 : $ABCD$ est un quadrilatère convexe. Les triangles équilatéraux $ABM\ et\ CDP$ sont construits à l'extérieur de $ABCD$ et les triangles équilatéraux $BCN\ et\ ADQ$ sont construits à l'intérieur de $ABCD$. Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme ou que les points $M,N,P\ et\ Q$ sont alignés.

I.S : notons par $a,b,c,d,m,p,n\ et\ q$ les affixes , dans le plan complexe, des points $A,B,C,D,M,P,N\ et\ Q$ respectivement.

La formule de la rotation nous donne :

$m=a+(b-a)\varepsilon$, $n=c+(b-c)\varepsilon$, $p=c+(d-c)\varepsilon$, $q=a+(d-a)\varepsilon$ où $\varepsilon=e^{i\frac{\pi}{3}}$

Puisque $m+p=a+c+(b+d-a-c)\varepsilon=n+q$ alors $MNPQ$ est un parallélogramme ou que les points $M,N,P\ et\ Q$ sont alignés.

EXERCICE111: Sur les côtés et à l'extérieur d'un triangle ABC on construit trois carrés $ABMM'$, $ACNN'$ et $BCPP'$. Si A' , B' , C' désignent les milieux respectifs des segments $[M'N']$, $[P'M]$ et $[PN]$, montrer que ABC et $A'B'C'$ ont le même centre.

I.S : notons par $a,a',b,b',c,c',m,m',n,n',p,p'$ les affixes , dans le plan complexe, des points $A,A',B,B',C,C',M,M',N,N',P,P'$ respectivement.

En utilisant la formule de la rotation, on obtient les identités suivantes :

$n'=a+(c-a)i$ *et* $m'=a+(b-a)(-i)$ et donc $a'=\dfrac{m'+n'}{2}=\dfrac{2a+(c-b)i}{2}$

De la même manière on obtient $b'=\dfrac{2b+(a-c)i}{2}$ et $c'=\dfrac{2c+(b-a)i}{2}$

Puisque $\dfrac{a'+b'+c'}{3}=\dfrac{2a+2b+2c+(c-b+a-c+b-a)i}{6}=\dfrac{a+b+c}{3}$

Alors les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont même centre.

EXERCICE112 : Soit ABC un triangle à angles écus. Du même côté de la droite (AC) que le point B, on construit trois triangle isocèles DAB , BCE et AFC avec des angles droits aux points A , C et F respectivement. Montrer que les points D , E et F sont alignés.

I.S : soit a,b,c,d,e,f les affixes dans le plan complexe des points A,B,C,D,E,F respectivement.

En appliquant la formule de la rotation on obtient les identités suivantes :

$$d=a+(b-a)(-i)\ ,\ e=c+(b-c)i\ ,\ a=f+(c-f)i$$

On en déduit que $f=\dfrac{a-ci}{1-i}=\dfrac{a+c+(a-c)i}{2}=\dfrac{d+e}{2}$ soit que les points D,E et F sont alignés.

EXERCICE113 : Soit $ABCD$ un parallélogramme. Sur les côtés $[AB]$ et $[CD]$ et à l'extérieur du quadrilatère, on construit deux triangles équilatéraux. Sur les côtés $[AD]$ et $[BC]$ et à l'extérieur du quadrilatère, on construit deux carrés de centre respectivement G et H .

Montrer que $EHFG$ est un parallélogramme.

I.S : soit a,b,c,d,e,f,g,h les affixes dans le plan complexe des points A,B,C,D,E,F,G,H respectivement.

La rotation de centre G et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme A en D et La rotation de centre H et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme C en B donc $d-g=(a-g)i$ *et* $b-h=(c-h)i$

Soit que $g=\dfrac{d-ai}{1-i}$ *et* $h=\dfrac{b-ci}{1-i}$

De même La rotation de centre E et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ transforme B en A et La rotation de centre F et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ transforme D en A donc $a-e=(b-e)\varepsilon$ *et* $c-f=(d-f)\varepsilon$ avec $\varepsilon=e^{i\frac{\pi}{3}}$

Soit que $e=\dfrac{a-b\varepsilon}{1-\varepsilon}$ $\quad et \quad$ $f=\dfrac{c-d\varepsilon}{1-\varepsilon}$

Et puisque $g+h=\dfrac{d+b-(a+c)i}{1-i}=\dfrac{(a+c)-(a+c)i}{1-i}=a+c$

et que $e+f=\dfrac{a+c-(b+d)\varepsilon}{1-\varepsilon}=\dfrac{a+c-(a+c)\varepsilon}{1-\varepsilon}=a+c$ alors $g+h=e+f$

et donc $EHFG$ est un parallélogramme.

EXERCICE114 : Soit ABC un triangle rectangle en C . Soit D la projection orthogonale de C sur la droite (AB). Montrer que si M est le milieu du segment $[DC]$ et N est le milieu de $[BD]$ alors les deux droites (AM) et (CN) sont perpendiculaires.

I.S : considérons le plan complexe d'origine au point C et soient a,b,c,d,m,n les affixes des points A,B,C,D,M,N respectivement.

Les deux triangles ABC et CDB sont semblable de même orientation, donc $\dfrac{a-d}{d}=\dfrac{-d}{d-b}$

soit que $d=\dfrac{ab}{a+b}$, donc $m=\dfrac{d}{2}=\dfrac{ab}{2(a+b)}$ $\quad et \quad$ $n=\dfrac{b+d}{2}=\dfrac{2ab+b^2}{2(a+b)}$

ainsi donc $\arg\left(\dfrac{m-a}{n}\right)=\arg\left(-\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ et par suite $(AM)\perp(CN)$

EXERCICE115 : Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1
Montrer que pour tout point P de ce cercle on a : $PA^2+PB^2+PC^2=6$

I.S : Considérons le plan complexe rapporté à un repère orthonormé tel que les affixes des points A,B,C soient les racines cubiques de l'unité 1 , j , j^2 (avec $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

et soit z l'affixe du point P avec $|z|=1$

On a :

$$\begin{aligned} PA^2+PB^2+PC^2 &= |z-1|^2+|z-j|^2+\left|z-j^2\right|^2 \\ &= (z-1)(\bar{z}-1)+(z-j)(\bar{z}-\bar{j})+(z-j^2)(\bar{z}-\overline{j^2}) \\ &= 3|z|^2-(1+j+j^2)\bar{z}-(1+\bar{j}+\overline{j^2})z+1+|j|^2+\left|j^2\right|^2 \\ &= 3+3=6 \end{aligned}$$

EXERCICE116 : Soit B un point du segment $[AC]$.
On construit du même côté de la droite (AC) deux triangles équilatéraux ABE et BCF Montrer que si M est le milieu du segment $[AF]$ et N est le milieu du segment $[CE]$ alors BMN est un triangle équilatéral.

I.S : soit a,b,c,e,f,m,n les affixes dans le plan complexe des points A,B,C,E,F,M,N respectivement.

Le point E est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\left(\frac{\pi}{3}\right)$

donc $e=b+(c-b)\varepsilon$ où $\varepsilon=e^{i\frac{\pi}{3}}$, et de même on obtient que $f=b+(c-b)\varepsilon$

donc $m=\dfrac{a+b+(c-b)\varepsilon}{2}$ $\quad et \quad$ $n=\dfrac{c+a+(b-a)\varepsilon}{2}$; Il suffit donc de montrer que $\dfrac{m-b}{n-b}=\varepsilon$

or $\dfrac{m-b}{n-b}=\varepsilon \Leftrightarrow m-b=(n-b)\varepsilon \Leftrightarrow a-b+(c-b)\varepsilon=(c+a-2b)\varepsilon+(b-a)\varepsilon^2$

$\Leftrightarrow a-b=(a-b)\varepsilon+(b-a)(\varepsilon-1)$ ce qui est vrai puisque $\varepsilon^2=\varepsilon-1$

EXERCICE117 : Soit $ABCD$ un carré de centre O et soit M $,N$ les milieux des segments $[BO]$ *et* $[CD]$ respectivement. Montrer que AMN est un triangle isocèle et rectangle.

I.S : considérons le plan complexe centré au point O et tel que $1,i,-1,-i$ soient les affixes des points A,B,C,D respectivement.

Les points M *et* N ont dans ce cas pour affixes $m=\dfrac{i}{2}$ *et* $n=\dfrac{-1-i}{2}$

Donc $\dfrac{aff(A)-m}{n-m}=\dfrac{1-\frac{i}{2}}{\frac{-1-i}{2}-\frac{i}{2}}=i$ par suite $AM=NM$ *et* $(AM)\perp(MN)$

EXERCICE118 : Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note A',B',C' *et* D' les milieux des côtés $[AB],[BC],[CD]$ *et* $[DA]$. Montrer que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

I.S : soit dans le plan complexe, a,b,c,d,a',b',c',d' les affixes des points A,B,C,D,A',B',C',D' respectivement.

On a $a'=\dfrac{a+b}{2}$, $b'=\dfrac{b+c}{2}$, $c'=\dfrac{c+d}{2}$, $d'=\dfrac{d+a}{2}$

Donc $d'-a'=\dfrac{d+a}{2}-\dfrac{a+b}{2}=c'-b'$ et donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

EXERCICE119 : Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On construit à l'extérieur de ce quadrilatère quatre triangles isocèles rectangles $AA'B$, $BB'C$, $CC'D$ et $DD'A$ (comme indiqué sur le schéma)
Montrer que : $A'C'=B'D'$ et que $(A'C')\perp(B'D')$

I.S : soit dans le plan complexe, a,b,c,d,a',b',c',d' les affixes des points A,B,C,D,A',B',C',D' respectivement.

Le point A est l'image de B par la rotation de centre A' et d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $a-a'=\mathrm{i}(b-a')$

De la même façon on déduit que : $b-b'=\mathrm{i}(c-b')$, $c-c'=\mathrm{i}(d-c')$, $d-d'=\mathrm{i}(a-d')$

Donc $(a-a')-(c-c')=i(b-d+c'-a')$ *et* $(b-b')-(d-d')=i(c-a+d'-b')$

Ou encore $(1-i)(c'-a')=i(b-d)+(c-a)$ et $(1-i)(d'-b')=i(c-a)+(d-b)$

Ainsi donc $d'-b'=i(c'-a')$ soit que $B'D'=A'C'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{B'D'}}\right)=\frac{\pi}{2}$

EXERCICE120 : Soit $\alpha \in [0,2\pi]$, on considère l'équation $z^2-2^{\alpha+1}cos(\alpha)z+2^{2\alpha}=0$

On note z_1 et z_2 les deux solutions de cette équation, O l'origine du repère, A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2 .

Déterminer α pour que le triangle OAB soit équilatéral.

I.S : remarquons que les coefficients de cette équation sont réels donc z_1 et z_2 sont conjuguées.

On a $z^2-2^{\alpha+1}cos(\alpha)z+2^{2\alpha}=0 \Leftrightarrow \left(2z+2^{\alpha+1}cos(\alpha)\right)^2=\left(2^{\alpha}i\,sin(\alpha)\right)^2$

Remarque : $az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow (2az+b)^2=b^2-4ac$

Et donc $z_1=2^{\alpha}e^{i\alpha}$ et $z_2=\overline{z_1}=2^{\alpha}e^{-i\alpha}$

ainsi donc $OA=OB$ et il suffit d'avoir $OA=AB$

or $OA=AB \Leftrightarrow OA^2=AB^2 \Leftrightarrow |z_1|^2=|z_2-z_1|^2 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin(\alpha)=\pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha\equiv\pm\frac{\pi}{6}\ [\pi]$

et puisque $\alpha \in [0,2\pi]$ alors les valeurs qui conviennent sont : $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$

EXERCICE121 : Dans le plan complexe, on considère les points $M(z)$, $P(z^2)$ et $Q(z^3)$ où $z\in\mathbb{C}$

Déterminer l'ensemble des points M tels que $M\ ,P\ et\ Q$ soit alignés.

I.S : les points $M\ ,P\ et\ Q$ sont alignés si et seulement si $z^2=z\ \ ou\ \ \frac{z^3-z}{z^2-z}\in\mathbb{R}$

et $z^2=z\ \ ou\ \ \frac{z^3-z}{z^2-z}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z=0\ \ ou\ z=1\ ou\ \ z+1\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ M appartient à l'axe des réels.

Donc l'ensemble des points M tels que $M\ ,P\ et\ Q$ soit alignés est l'axe des réels.

EXERCICE122 : Soient z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation : $z^2-(1+2i)z-1+i=0$

Pour tout entier $n\geq 2$, on note M_n le point d'affixe z_1^n , P_n le point d'affixe z_2^n et O l'origine du repère.

Déterminer les entiers n pour lesquels OM_nP_n est un triangle rectangle.

I.S : on a $z^2-(1+2i)z-1+i=0 \Leftrightarrow \left(2z-(1+2i)\right)^2=1 \Leftrightarrow z=1+i\ \ ou\ z=i$

OM_nP_n est rectangle $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_1^n}{z_2^n}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\frac{\pi}{2n}\ \left[\frac{\pi}{n}\right]$

Or $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{i}=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc OM_nP_n est rectangle $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n}=\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ $avec$ $k\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=\frac{2k+1}{n} \Leftrightarrow n=4k+2\ \ avec\ \ k\geq 0$$

Ainsi les entiers qui vérifies l'hypothèse sont les entiers de la forme $n=4k+2$: $n=2;6;10;......$

EXERCICE123 : Déterminer tous les nombres complexes z tels que le point M d'affixe z et les points M_1, M_2, M_3 d'affixes les racines cubiques de z forment un parallélogramme.

I.S : notons $z_1, z_2\, et\, z_3$ les trois racines cubiques de z

Puisque $MM_1M_2M_3$ est un parallélogramme alors $z+z_2=z_1+z_3$

Et puisque $z_1, z_2\, et\, z_3$ les trois racines cubiques de z alors $z_1^3=z_2^3=z_3^3=z$ et $z_1+z_2+z_3=0$

Donc $z_2^3+z_2=-z_2$ soit que $z_2^3+2z_2=0$

et donc $z_2=0$ ou $z_2=\pm i\sqrt{2}$

si $z_2=0$ alors $z_1=z_3=0$ et le parallélogramme est réduit à un seul point

si $z_2=\pm i\sqrt{2}$ alors $z_1=jz_2$ et $z_3=j^2z_2$ ($1, j\, et\, j^2$ sont les trois racines cubiques de 1)

EXOS124 : Soit $ABCD$ un carré. On considère les deux points $P\in[AB]$ et $Q\in[BC]$ tels que $BP=BQ$ et soit H la projection orthogonale de B sur (PC).

Montrer que les deux droites (QH) et (HD) sont orthogonales.

I.S : on suppose que le plan complexe est d'Origine le point B. Les points C, A, Q, P et D ont pour affixes respectivement $1, i, a, ia$ et $(1+i)$ (avec $a\in\mathbb{R}^*$) et le point H d'affixe h

On a $(HB)\perp(PC) \Leftrightarrow \dfrac{h}{ia-1}\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow h(-ai-1)=-\bar{h}(ai-1)$

Et P, H, C alignés $\Leftrightarrow \dfrac{h-1}{ai-1}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (h-1)(-ai-1)=(\bar{h}-1)(ai-1)$

En additionnant les deux équations on obtient : $h=\dfrac{ai}{ai+1}$ (remarquer que $\dfrac{1}{h}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{ai}$)

De plus $\dfrac{h-a}{h-(1+i)}=\dfrac{ai(1-a+i)}{-1+a-i}=-ai\in i\mathbb{R}$ et donc $(HQ)\perp(HP)$

EXERCICE125 : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(\mathrm{E}): \mathrm{z}^3+2\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\mathrm{z}^2+2\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\mathrm{z}-8\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=0$$

Sachant qu'elle admet une racine de la forme $z_1=1+\lambda i$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ et que z_2 et z_3 sont les deux autres solutions de l'équation (E)

Montrer que les points $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ et $D\left(\dfrac{2}{z_1}\right)$ sont cocycliques.

I.S : C.N : $z_1=1+\lambda i$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ est une solution de (E)

$$\Rightarrow (1+\lambda i)^3+2\left(1-i\sqrt{3}\right)(1+\lambda i)^2+2\left(1-i\sqrt{3}\right)(1+\lambda i)-8\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$$

ce qui donne comme condition nécessaire, $\lambda=\sqrt{3}$

C.S : Réciproquement on vérifie que $z_1=1+i\sqrt{3}$ est bien une racine de l'équation (E)

Soit z_2 *et* z_3 les deux autres solutions de l'équation (E)

D'après les formules de VIETTE, $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=-2\left(1-i\sqrt{3}\right) & (1) \\ z_1z_2+z_1z_2+z_1z_2=2\left(1-i\sqrt{3}\right) & (2) \\ z_1z_2z_3=8\left(1+i\sqrt{3}\right) & (3) \end{cases}$ donc $\begin{cases} z_1+z_2=-3+i\sqrt{3} \\ z_1z_2=8 \end{cases}$

soit que z_2 *et* z_3 sont les deux racines de l'équation $X^2-\left(3-i\sqrt{3}\right)X+8=0$

Donc $z_2=-1-i\sqrt{3}\quad et\quad z_3=2\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

et on vérifie que : $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\div\dfrac{z_2-\dfrac{2}{z_1}}{z_3-\dfrac{2}{z_1}}\in\mathbb{R}$, donc les points A,B,C,D sont cocycliques puisque ils ne sont pas alignés.

EXERCICE126 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a+b\neq c$
On considère les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignés.

Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme B en A

et $Q(q)$ le centre de la rotation d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A

et $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$

Soient E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$

Montrer que les points K , P , Q et D sont cocycliques.

I.S : on a par hypothèses :

$a-p=i(b-p)$, $a-q=-i(c-q)$, $d=\dfrac{b+c}{2}$, $p=\dfrac{e+b}{2}$, $q=\dfrac{f+c}{2}$ et $k=\dfrac{e+f}{2}$

On en déduit que : $p=\dfrac{a-ib}{1-i}$, $q=\dfrac{a-ic}{1-i}$, $d=\dfrac{b+c}{2}$ *et* $k=p+q-d$

Or $\dfrac{k-p}{d-p}\div\dfrac{k-q}{d-q}=\dfrac{q-d}{d-p}\div\dfrac{p-d}{d-q}=1\in\mathbb{R}$ donc les quatre points K,P,Q,D sont cocycliques.

EXERCICE127: Trouver les nombres complexes $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ vérifiant : $z^3=18+26i$

I.S : On a : $z^3=18+26i \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3xy^2=18 \\ 3x^2y-y^3=26 \end{cases}$

posons $y=tx$, dans l'égalité $26\left(x^3-3xy^2\right)=18\left(3x^2y-y^3\right)$ si $x\neq 0$ *et* $y\neq 0$ alors

$18\left(3t-t^3\right)=26\left(1-3t^2\right)$ soit que : $(3t-1)\left(3t^2-12t-13\right)=0$ et donc la seule solution rationnelle es $t=\dfrac{1}{3}$ ce qui donne et donc $z=3+i$

EXERCICE128 : Considérons l'ensemble $E=\{z\in\mathbb{C} : z=x-1+xi \ , x\in\mathbb{R}\}$
Montrer qu'il existe un unique $u\in E$ tel que : $|u|\leq|z|$ pour tout $z\in E$

I.S : Posons $z=y-1+iy$ avec $y\in\mathbb{R}$
il suffit de montrer qu'il existe un unique réel $x\in\mathbb{R}$ tel que : $(x-1)^2+x^2\leq(y-1)^2+y^2$ pour tout $y\in\mathbb{R}$ ce qui veut dire que x est le point minimum de la fonction $f : y\mapsto f(y)=(y-1)^2+y^2$ or

$$f(y)=(y-1)^2+y^2=2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

dont le minimum est $\dfrac{1}{2}$ et il est atteint au point $x=\dfrac{1}{2}$ et donc $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

EXERCICE129 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_n) : $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\dfrac{1+ia}{1-ia}$ avec $a\in\mathbb{R}$

I.S : on a $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\dfrac{1+ia}{1-ia}\Rightarrow\left|\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right|=\left|\dfrac{1+ia}{1-ia}\right|=1\Rightarrow|1+iz|=|1-iz|$

Et $|1+iz|=|1-iz|\Rightarrow|1+iz|^2=|1-iz|^2\Rightarrow(1+iz)\left(1-i\bar{z}\right)=(1-iz)\left(1+i\bar{z}\right)\Rightarrow z=\bar{z}\Rightarrow z\in\mathbb{R}$

Or pour tout $z\in\mathbb{R}$ il existe un unique $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $z=\tan\theta$ et il existe un unique $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $a=\tan\alpha$

Donc $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\dfrac{1+ia}{1-ia}\Leftrightarrow e^{i2n\theta}=e^{i2\alpha}\Leftrightarrow 2n\theta\equiv2\alpha\ [2\pi]\Leftrightarrow\theta\equiv\dfrac{\alpha}{n}\left[\dfrac{\pi}{n}\right]$

Ainsi donc les solutions de l'équation sont les $z_k=\tan\left(\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{k\pi}{n}\right)$ *avec* $k\in\{0,1,.....,n-1\}$

EXERCICE130 : Soit $\omega\in U_n$ une racine n-iemme de 1 et z un nombre complexe tel que : $\left|z-\omega^k\right|\leq1$ pour $k=0,1,......,n-1$. Montrer que : $z=0$

I.S : On a : $\left|z-\omega^k\right|\leq1\Leftrightarrow\left(z-\omega^k\right)\overline{\left(z-\omega^k\right)}\leq1\Leftrightarrow|z|^2\leq z.\overline{(\omega_k)}+\bar{z}.\omega_k$
et ceci pour tout $k\in\{0,1,......,n-1\}$

en sommant ces relations, on obtient : $n|z|^2\leq z.\overline{\left(\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega_k\right)}+\bar{z}.\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega_k=0$ et donc $z=0$

puisque $\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega_k=0$

EXERCICE131 : Soit z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes de même module et tels que : $z_1+z_2+z_3 \neq 0$

Montrer que : $Re\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right).Re\left(\frac{1}{z_1+z_2+z_3}\right) \geq 0$

I.S : Posons $r=|z_1|=|z_2|=|z_3|$ donc $z_1 \cdot \overline{z_1}=z_2 \cdot \overline{z_2}=z_3 \cdot \overline{z_3}=r^2$ et $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}}{r^2}=\frac{\overline{z_1+z_2+z_3}}{r^2}$

D'autre part on a : $\frac{1}{z_1+z_2+z_3}=\frac{\overline{z_1+z_2+z_3}}{|z_1+z_2+z_3|^2}$

par conséquent $Re\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right).Re\left(\frac{1}{z_1+z_2+z_3}\right)=Re\left(\frac{\overline{z_1+z_2+z_3}}{r^2}\right)\cdot Re\left(\frac{\overline{z_1+z_2+z_3}}{|z_1+z_2+z_3|^2}\right)$

$$==\frac{\left(\mathrm{Re}\left(\overline{z_1+z_2+z_3}\right)\right)^2}{r^2|z_1+z_2+z_3|^2} \geq 0$$

EXERCICE132 : Considérons l'ensemble $A=\{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ et un nombre réel a tel que $|a|>1$

Montrer que la fonction $f : A \to A$ définie par : $f(z)=\frac{1+az}{z+a}$ est une bijection.

I.S : Montrons d'abord que la fonction f est bien définie : $|f(z)|<1$ pour tout z tel que $|z|<1$

En effet $|f(z)|<1 \Leftrightarrow |1+az|^2<|z+a|^2 \Leftrightarrow (1+az)(1+a\overline{z})<(z+a)(\overline{z}+a)$

Soit que $1+|a|^2|z|^2<|a|^2+|z|^2$ ou encore $(|a|^2-1)(|z|^2-1)<0$ ce qui est vrai puisque $|z|<1$ *et* $|a|>1$

Pour montrer que f est une bijection il suffit de remarquer que pour tout $x \in A$ il existe un unique $z \in A$ tel que $f(z)=\frac{1+az}{z+a}=x$ il suffit de prendre $z=\frac{ax-1}{a-x}=-f(-x) \in A$ puisque $|z|=|-f(-x)|<1$

EXERCICE133 :Trouver tous les réels positifs x *et* y satisfaisant au système d'équations suivant :

$$(S) : \begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$$

I.S : posons $u=\sqrt{x}$ *et* $v=\sqrt{y}$ et $z=u+iv$ donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(1+\frac{1}{u^2+v^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}} \\ v\left(1-\frac{1}{u^2+v^2}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$

donc $u+iv+\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$ ou encore $z+\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$ soit que $z+\frac{1}{z}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$

donc z vérifie l'équation $z^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)z+1=0$ dont les deux solutions sont :

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{21}}{21}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}+\sqrt{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{21}}{21}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}-\sqrt{2}\right)$

Ce qui donne $u=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pm\frac{2\sqrt{21}}{21}\right)$ et $v=\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}\pm\sqrt{2}\right)$ et donc $x=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pm\frac{2\sqrt{21}}{21}\right)^2$ et $y=\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}\pm\sqrt{2}\right)^2$

EXERCICE134 : Montrer qu'il n'existe aucun entier naturel non nul n tel que le nombre complexe $z=\frac{2+i}{2-i}$ soit une racine $n-iemme$ de l'unité.

I.S : Il est évident que $|z|=1$

Supposons qu'il existe un entier $n\geq 1$ tel que $z^n=1$

donc $(2+i)^n=(2-i)^n$ or $2+i=(2-i)+2i$ donc $(2-i)^n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(2-i)^{n-k}(2i)^k$

soit que $(2i)^n=(-2+i)\left[\sum_{k=1}^{k=n-1}C_n^k(2-i)^{n-k-1}(2i)^k\right]=(-2+i)(a+ib)$ avec $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$

on en déduit par passage au modules que : $2^n=5\left(a^2+b^2\right)$ et donc 5 divise 2^n ce qui est absurde.

EXERCICE135 : Soit U_n l'ensemble des racines $n-iemme$ de l'unité.
Montrer qu'il existe $\alpha\in U_n$ tel que $1+\alpha\in U_n$ si et seulement si n est un multiple de 6

I.S : si $\alpha\in U_n$ et $1+\alpha\in U_n$ alors $|\alpha|=|1+\alpha|=1$ et donc $1=|1+\alpha|^2=1+\alpha+\overline{\alpha}+|\alpha|^2=2+2\operatorname{Re}(\alpha)$

Et donc $\operatorname{Re}(\alpha)=-\frac{1}{2}$ soit que $\alpha=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $1+\alpha=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$

Or $1+\alpha\in U_n$ donc $(1+\alpha)^n=1$ ce qui donne $n\equiv 0\ \ (6)$

Réciproquement si $n\equiv 0\ \ (6)$ alors $\alpha=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in U_n$ *et* $1+\alpha=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in U_n$

EXERCICE136 : Montrer que : $\left(C_n^0-C_n^2+C_n^4-......\right)^2+\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-......\right)^2=2^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
puis calculer les deux sommes : $C_n^0-C_n^2+C_n^4-......$ et $C_n^0-C_n^2+C_n^4-......$

I.S : Posons $x_n=C_n^0-C_n^2+C_n^4-......\ \ et\ \ y_n=C_n^1-C_n^3+C_n^5-......$

on remarque que : $(1+i)^n=x_n+iy_n$ en passant aux modules au carré, on obtient : $2^n=x_n^2+y_n^2$

Remarque : $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(cos\frac{n\pi}{4}+i\,sin\frac{n\pi}{4}\right)=x_n+iy_n$ et donc $x_n=2^{\frac{n}{2}}cos\frac{n\pi}{4}$ et $y_n=2^{\frac{n}{2}}son\frac{n\pi}{4}$

EXERCICE137 : Considérons les entiers suivants :

$a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + ...$

$b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + ...$

$c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + ...$

Montrer que : $a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = 2^n$

I.S : Considérons le nombre complexe $j = cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\frac{2\pi}{3}$

Remarquons que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

On a : $(1+1)^n = a_n + b_n + c_n$, $(1+j)^n = a_n + b_n j + c_n j^2$ et $(1+j^2)^n = a_n + b_n j^2 + c_n j$

par suite : $a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = (a_n + b_n + c_n)(a_n + b_n j + c_n j^2)(a_n + b_n j^2 + c_n j)$

$$= 2^n (1+j)^n (1+j^2)^n = 2^n (-j^2)^n (-j)^n = 2^n$$

EXERCICE138 : Soit $z_1, z_2, ..., z_n$ n nombres complexes de module 1

Montrer que $0 \le \left(\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{z_k}\right) \le n^2$

I.S : par hypothèse on a : $\overline{z_k} = \frac{1}{z_k}$ pour tout $k \in \{1, 2, ...n\}$ donc

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{z_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{k=n} \overline{z_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right)\overline{\left(\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right)} = \left|\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right|^2$$

Donc d'une part $\left(\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{z_k}\right)$ est un module au carré donc positif

et d'autre part en appliquant l'inégalité triangulaire, $\left(\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{z_k}\right) \le \left|\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right|^2 = n^2$

EXERCICE139 : Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et n un entier naturel non nul.

Calculer : $P = \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 - j^k + j^{2k}\right)$

I.S : remarquons que : $1 - j + j^2 = -2j$ et que $1 + j - j^2 = -2j^2$

Donc $1 - j^n + j^{2n} = \begin{cases} 1 & si\ n \equiv 0\ (3) \\ -2j & si\ n \equiv 1\ (3) \\ -2j^2 & si\ n \equiv 2\ (3) \end{cases}$ ainsi le produit de termes consécutifs est toujours égal à

$1 \cdot (-2j) \cdot (-2j^2) = 4$

Et donc $P=\begin{cases} 2^{\frac{2n}{3}} & si \quad n\equiv 0 \ (3) \\ -2^{2\left[\frac{n}{3}\right]+1} & si \quad n\equiv 1 \ (3) \\ 2^{2\left[\frac{n}{3}\right]+2} & si \quad n\equiv 2 \ (3) \end{cases}$ avec $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ désigne la partie entière de $\dfrac{n}{3}$

EXERCICE140 : Soit a un réel strictement positif et $E_a=\left\{z\in\mathbb{C}^*:\ \left|z+\dfrac{1}{z}\right|=a\right\}$

Trouver le minimum et le maximum de $|z|$ lorsque $z\in E_a$

I.S : Soit $z\in E_a$ on a $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=a$ donc $a^2=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^2=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\left(\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}\right)=\dfrac{|z|^4+z^2+\overline{z}^2+1}{|z|^2}$

ou encore : $a^2=\dfrac{|z|^4+\left(z+\overline{z}\right)^2-2|z|^2+1}{|z|^2}$ donc $|z|^4-|z|^2\left(a^2+2\right)+1=-\left(z+\overline{z}\right)^2\leq 0$

puisque $z+\overline{z}=2\,Re(z)$ est un réel.

ce qui nécessite : $|z|^2\in\left[\dfrac{a^2+2-\sqrt{a^4+4a^2}}{2};\ \dfrac{a^2+2+\sqrt{a^4+4a^2}}{2}\right]$

ou encore $|z|\in\left[\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2};\ \dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$

et donc $min|z|=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ et $max|z|=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$

EXERCICE141 : Montrer que pour tout nombre complexe z , on a : $|z+1|\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $|z^2+1|\geq 1$

I.S : Supposons qu'il existe un nombre complexe z tel que : $|z+1|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $|z^2+1|<1$

posons $z=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ donc $z^2=a^2-b^2+2iab$

et donc $|z+1|^2<\dfrac{1}{2}$ et $|z^2+1|^2<1$

soit que $(a+1)^2+b^2<\dfrac{1}{2}$ et $\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2<1$

par conséquent $2\left(a^2+b^2\right)+4a+1<0$ et $\left(a^2+b^2\right)^2+2\left(a^2-b^2\right)<0$

en sommant, on obtient : $\left(a^2+b^2\right)^2+(2a+1)^2<0$ ce qui est absurde.

donc on a : $|z+1|\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $|z^2+1|\geq 1$

EXERCICE142 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que : $\left|z^3+\frac{1}{z^3}\right| \le 2$. Montrer que $\left|z+\frac{1}{z}\right| \le 2$

I.S : à partir de l'identité $\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 = z^3+\frac{1}{z^3}+3\left(z+\frac{1}{z}\right)$ on obtient $\left|z+\frac{1}{z}\right|^3 - 3\left|z+\frac{1}{z}\right| - 2 \le 0$

soit que $\left(\left|z+\frac{1}{z}\right|-2\right)\left(\left|z+\frac{1}{z}\right|+1\right)^2 \le 0$ et donc $\left|z+\frac{1}{z}\right| \le 2$

EXERCICE143: Soient $x , y \ et \ z$ trois nombres complexes distincts tels que : $y = tx+(1-t)z$ avec $t \in [0;1]$

Montrer que : $\frac{|z|-|y|}{|z-y|} \ge \frac{|z|-|x|}{|z-x|} \ge \frac{|y|-|x|}{|y-x|}$

I.S : On a : $y = tx+(1-t)y \quad \Leftrightarrow \quad z-y = t(z-x)$

l'inégalité $\frac{|z|-|y|}{|z-y|} \ge \frac{|z|-|x|}{|z-x|}$ devient $(|z|-|y|) \ge t(|z|-|x|)$ donc $|y| \le (1-t)|z|+t|x|$ ce qui est toujours vrais d'après l'inégalité triangulaire appliquée à : $y = tx+(1-t)z$

la deuxième inégalité est obtenue de la même manière en écrivant l'égalité : $y = tx+(1-t)z$ sous la forme $y-x = (1-t)(z-x)$

EXERCICE144 : Soient $u \ , v \ , w \ et \ z$ quatre nombres complexes tels que :

$|u| < 1 \ , |v| = 1 \ et \ \ w = \frac{v(u-z)}{\overline{u}\cdot z-1}$

Montrer que : $|w| \le 1$ si et seulement si $|z| \le 1$

I.S : Remarquer que $|w| = |v|\cdot\frac{|u-z|}{|\overline{u}z-1|} = \frac{|u-z|}{|\overline{u}z-1|} \le 1$ si et seulement si $|u-z| \le |\overline{u}z-1|$ si et seulement si

$|u-z|^2 \le |\overline{u}z-1|^2$ si et seulement si $(u-z)(\overline{u}-\overline{z}) \le (\overline{u}z-1)(u\overline{z}-1)$

si et seulement si $(|u^2|-1)(|z^2|-1) \le 0$

puisque $|u| \le 1$ alors $|w| \le 1$ si et seulement si $|z| \le 1$

EXERCICE145 : Soit un entier naturel $n > 2$ et soit z un nombre complexe de module 1
Montrer que : $n|1+z|+|1+z^2|+|1+z^3|+......+|1+z^{2n}|+|1+z^{2n+1}| \geq 2n$

I.S : On a :

$$n|1+z|+|1+z^2|+|1+z^3|+......+|1+z^{2n}|+|1+z^{2n+1}| = \sum_{k=1}^{k=n}\left(|1+z|+|1+z^{2k+1}|\right)+\sum_{k=1}^{k=n}|1+z^{2k}|$$

$$\geq \sum_{k=1}^{k=n}|z-z^{2k+1}|+\sum_{k=1}^{k=n}|1+z^{2k}| = \sum_{k=1}^{k=n}|1-z^{2k}|+\sum_{k=1}^{k=n}|1+z^{2k}| \geq \sum_{k=1}^{k=n}\left|\left(1-z^{2k}\right)+\left(1+z^{2k}\right)\right| = 2n$$

Ce qu'il fallait démontré.

EXERCICE146: Trouver tous les nombres complexes z tels que : $\big|z-|z+1|\big| = \big|z+|z-1|\big|$

I.S : On a $\big|z-|z+1|\big| = \big|z+|z-1|\big| \Leftrightarrow \big|z-|z+1|\big|^2 = \big|z+|z-1|\big|^2$

ce qui veut dire $\left(z-|z+1|\right)\cdot\left(\overline{z}-|z+1|\right) = \left(z+|z-1|\right)\cdot\left(\overline{z}+|z-1|\right)$

ainsi donc : $\big|z-|z+1|\big| = \big|z+|z-1|\big| \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}-\left(z+\overline{z}\right)|z+1|+|z+1|^2 = z\cdot\overline{z}-\left(z+\overline{z}\right)|z-1|+|z-1|^2$

soit que : $|z+1|^2-|z-1|^2 = \left(z+\overline{z}\right)\cdot\left(|z+1|+|z-1|\right)$ ou encore :

$$(z+1)\left(\overline{z}+1\right)-(z-1)\left(\overline{z}-1\right) = \left(z+\overline{z}\right)\cdot\left(|z+1|+|z-1|\right)$$

Ce qui est équivalent à : $2\left(z+\overline{z}\right) = \left(z+\overline{z}\right)\cdot\left(|z+1|+|z-1|\right)$

ce qui donne $z+\overline{z}=0$ ou $|z+1|+|z-1|=2$

l'équation $z+\overline{z}=0$ donne $z\in\mathbb{R}$

si $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ alors $|z+1|+|z-1| = MA+MB$ avec $A(1)$ *et* $B(-1)$ et puisque $AB=2$ alors l'équation $|z+1|+|z-1|=2$ n'admet pas de solution autre que le segment $[-1,1]\subset\mathbb{R}$ c'est l'ensemble des points M tels que $MA+MB=AB$

En conclusion l'ensemble cherché est $\mathbb{R}$

EXERCICE147 : Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1 , on a : $\sqrt{2} \leq |1-z|+|1+z^2| \leq 4$

I.S : Posons $z=e^{it}$ donc $1-z = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}}$ et donc $|1-z| = 2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$

et $1+z^2 = 2\cos t\cdot e^{it}$ donc $|1+z^2| = 2|\cos t| = 2\left|1-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right|$

de plus on montre facilement que pour tout $x\in[-1;1]$ on a : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |x|+|1-2x^2| \leq 2$

et donc $\sqrt{2} \leq |1-z|+|1+z^2| \leq 4$

EXERCICE148: Soit $z_1 \; et \; z_2$ deux nombres complexes distincts et de même module.

Montrer que : $\dfrac{1}{2}|z_1+z_2|<|z_1|$

I.S : Posons $z_1=a+ib \; et \; z_2=c+id$ avec a,b,c,d des nombres réels.

L'inégalité est équivalente à : $(a+c)^2+(b+d)^2<4(a^2+b^2)$ et puisque $a^2+b^2=c^2+d^2$ alors elle est équivalente aussi à $(a-c)^2+(b-d)^2>0$ puisque $z_1 \neq z_2$

Remarque : Considérons les points $M(z_1) et \; N(z_2)$ avec $OM=ON$

Si I est le milieu du segment $[MN]$ alors l'affixe de I est $\dfrac{z_1+z_2}{2}$ et $OI<OM$

EXERCICE149 : Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que si $|1+z|<\dfrac{1}{2}$ alors $|1+z^2|>1$

I.S : <u>solution algèbrique</u> : supposons que $|1+z|<\dfrac{1}{2}$ et $|1+z^2|\leq 1$ et posons $z=a+ib \;\; avec \; (a,b)\in\mathbb{R}^2$

Ona $|1+z|^2=(a+1)^2+b^2 \;\; et \;\; |1+z^2|^2=(a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2$

Donc $|1+z|<\dfrac{1}{2}$ et $|1+z^2|\leq 1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |1+z|^2<\dfrac{1}{4} \\ |1+z^2|^2\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a+1+b^2<\dfrac{1}{4} \\ (a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a^2+b^2)+8a+3<0 \\ 2(a^2+b^2)^2+4(a^2-b^2)+3\leq 0 \end{cases}$ et en sommant, on obtient $2(a^2+b^2)^2+8a^2+8a+3<0$

Ce qui est absurde car $2(a^2+b^2)^2>0$ et $8a^2+8a+3=8\left(\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}\right)>0$

Donc on a : si $|1+z|<\dfrac{1}{2}$ alors $|1+z^2|>1$

<u>Solution géométrique</u> : soit $\Omega(-1)$, $M(z)$, $M'(z^2)$

on a $|1+z|<\dfrac{1}{2}$ donc M est dans le disque ouvert (D) de centre Ω et de rayon $\dfrac{1}{2}$

si on considère les deux tangentes à (D) issues de O,l'origine du repère, elles coupent (D) en deux points $K \; et \; K'$. l'angle $\widehat{KO\Omega}=\dfrac{\pi}{6}$ puisque son sinus est $\dfrac{\Omega K}{O\Omega}=\dfrac{1}{2}$

en on déduit que $\pi-\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\pi+\dfrac{\pi}{6}$ modulo 2π et donc $-\dfrac{\pi}{3}<\arg z^2<+\dfrac{\pi}{3}$ modulo 2π

ainsi M' se trouve à l'extérieur du disque (D') de centre de centre Ω et de rayon 1ce qui se traduit par $\Omega M'=|1+z^2|>1$

EXERCICE150 : Soient $a\,,b\;et\;c$ trois nombres complexes tels que : $|a|=|b|=|c|=1$ et que

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}+1=0$$

Montrer que : $|a+b+c|=1\;ou\;2$

I.S : On a : $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad a^3+b^3+c^3+abc=0$

Soit que : $-4abc=a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

Posons $z=a+b+c$, donc $z^3-3z(ab+bc+ca)=-4abc$ soit que $z^3=abc\left(3z\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)-4\right)$

Ou encore $z^3=abc\left(3z\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)-4\right)=abc\left(3|z|^2-4\right)$ et donc $|z|^3=\left|3|z|^2-4\right|$

Si $|z|\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ alors $|z|^3-3|z|^2+4=0$ ce qui implique $|z|=2$

Si $|z|<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ alors $|z|^3+3|z|^2-4=0$ ce qui implique $|z|=1$

Donc dans tous les cas $|z|=1\;ou\;2$

EXERCICE151 : Déterminer les nombres complexes z tels que : $|z|=1$ et $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{z}\right|=1$

I.S : Posons $z=\cos x+i\sin x\;\;avec\;\;x\in[0;2\pi[$

Dans ce cas $1=\left|\dfrac{z}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{z}\right|=\dfrac{\left|z^2+\overline{z}^2\right|}{|z|^2}=|\cos 2x+i\sin 2x+\cos 2x-i\sin 2x|=2|\cos 2x|$

Donc $\cos 2x=\pm\dfrac{1}{2}$

Si $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$ l'équation admet quatre solutions : $x_1=\dfrac{\pi}{6},\;x_2=\dfrac{5\pi}{6},\;x_3=\dfrac{7\pi}{6},\;x_4=\dfrac{11\pi}{6}$

Si $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$ l'équation admet encore quatre solutions : $x_5=\dfrac{\pi}{3},\;x_6=\dfrac{2\pi}{3},\;x_7=\dfrac{4\pi}{3},\;x_8=\dfrac{5\pi}{3}$

EXERCICE152 : Soient $a\;et\;b$ deux nombres complexes tels que : $|a|=|b|=r>0$

Montrer que : $\left(\dfrac{a+b}{r^2+ab}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{r^2-ab}\right)^2\geq\dfrac{1}{r^2}$

I.S : On a $\left(\dfrac{a+b}{r^2+ab}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{r^2-ab}\right)^2\geq\dfrac{1}{r^2}\;\Leftrightarrow\;\left(\dfrac{r(a+b)}{r^2+ab}\right)^2+\left(\dfrac{r(a-b)}{r^2-ab}\right)^2\geq 1$

Posons $a=re^{i2x}\;\;et\;\;b=re^{i2y}$ alors $\dfrac{r(a+b)}{r^2+ab}=\dfrac{r^2\left(e^{i2x}+e^{i2y}\right)}{r^2\left(1+e^{i(2x+2y)}\right)}=\dfrac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$

De même on a : $\dfrac{r(a-b)}{r^2-ab}=\dfrac{r^2\left(e^{i2x}-e^{i2y}\right)}{r^2\left(1-e^{i(2x+2y)}\right)}=\dfrac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}$

Donc $\left(\dfrac{a+b}{r^2+ab}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{r^2-ab}\right)^2=\dfrac{cos^2(x-y)}{cos^2(x+y)}+\dfrac{sin^2(x-y)}{sin^2(x+y)}\geq cos^2(x-y)+sin^2(x-y)=1$

EXERCICE153: Soit $a\, et\, z$ deux nombres complexes tels que : $|a+z|=1$

Montrer que : $\left|z^2+a^2\right|\geq\dfrac{\left|1-2|a|\right|}{\sqrt{2}}$

I.S :p283 Posons $z=r(\cos x+i\sin x)$ et $a=\rho(\cos b+i\sin b)$

On a : $1=|z+a|=\sqrt{r^2+\rho^2+2r\rho\cos(x-b)}$ donc $\cos(x-b)=\dfrac{1-r^2-\rho^2}{2r\rho}$

Et par suite $\left|z^2+a^2\right|=\sqrt{r^2(\cos 2x+i\sin 2x)+\rho^2(\cos 2b+i\sin 2b)}$

$$=\sqrt{\left(r^2\cos 2x+\rho^2\cos 2b\right)^2+\left(r^2\sin 2x+\rho^2\sin b\right)^2}$$

$$=\sqrt{r^4+\rho^2+2r^2\rho^2\cdot\left(2\left(\dfrac{1-r^2-\rho^2}{2r\rho}\right)-1\right)}$$

$$=\sqrt{2r^4+2\rho^4+1-2r^2-2\rho^2}$$

Finalement on a : $\left|z^2+a^2\right|\geq\dfrac{\left|1-2|a|\right|}{\sqrt{2}}\quad\Leftrightarrow\quad 2r^4+2\rho^4+1-2r^2-2\rho^2\geq\dfrac{\left(1-2r^2\right)^2}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\left(2\rho^2-1\right)^2\geq 0$

Ce qui achève la démonstration.

EXERCICE154 : Soit $a\,,b$ deux nombres réels tels que $a+b=1$ et $z_1\,,z_2$ deux nombres complexes de même modules égal à 1 . Montrer que $|az_1+bz_2|\geq\dfrac{|z_1+z_2|}{2}$

I.S : Posons $z_1=\cos(t_1)+i\sin(t_1)$ et $z_2=\cos(t_2)+i\sin(t_2)$

L'inégalité $|az_1+bz_2|\geq\dfrac{|z_1+z_2|}{2}$ est équivalente à

$$\sqrt{\left(a\cos(t_1)+b\cos(t_2)\right)^2+\left(a\sin(t_1)+b\sin(t_2)\right)^2}\geq\frac{1}{2}\sqrt{\left(\cos(t_1)+\cos(t_2)\right)^2+\left(\sin(t_1)+\sin(t_2)\right)^2}$$

Soit que $2\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(t_1-t_2)}\geq\sqrt{2+\cos(t_1-t_2)}$ ou encore que

$4a^2+4(1-a)^2+8a(1-a)\cos(t_1-t_2)\geq 2+2\cos(t_1-t_2)$ soit que $1\geq\cos(t_1-t_2)$

ce qui est toujours vrai.

EXERCICE155 : Soit a un réel donné. Calculer $C=\sum_{k=1}^{k=n} a^k \cos kx \quad et \quad S=\sum_{k=1}^{k=n} a^k \sin kx$

I.S : On a $1+C+iS=\sum_{k=0}^{k=n} a^k\left(\cos kx+i\sin kx\right)=\sum_{k=0}^{k=n} a^k\left(\cos x+i\sin x\right)^k$

$$=\frac{1-a^{n+1}\left(\cos x+i\sin x\right)^{n+1}}{1-a\cos x-ia\sin x}=\frac{1-a^{n+1}\left(\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x\right)}{1-a\cos x-ia\sin x}$$

$$=\frac{\left[1-a^{n+1}\left(\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x\right)\right]\left[1-a\cos x+ia\sin x\right]}{a^2-2a\cos x+1}$$

Donc $1+C=\dfrac{a^{n+2}\cos nx-a^{n+1}\cos(n+1)x-a\cos x+1}{a^2-2a\cos x+1}$ et $S=\dfrac{a^{n+2}\sin nx-a^{n+1}\sin(n+1)x+a\sin x}{a^2-2a\cos x+1}$

EXERCICE156 : Calculer les deux sommes suivantes : $\sum_{k=1}^{n} k\cos kt \quad et \sum_{k=1}^{n} k\sin kt \qquad \left(t\in\left]0;2\pi\right[\right)$

I.S : posons $z=\cos t+i\sin t$

A partir de l'identité $z+2z^2+........+nz^n=\left(z+z^2+......+z^n\right)+\left(z^2+......+z^n\right)+....+z^n$

$$=\frac{1}{z-1}\left[\left(z^{n+1}-z\right)+\left(z^{n+1}-z^2\right)+......+\left(z^{n+1}-z^n\right)\right]$$

$$=\frac{nz^{n+1}}{z-1}-\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}$$

On déduit que : $\sum_{k=1}^{n} k\cos kt=\dfrac{(n+1)\sin\dfrac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\dfrac{t}{2}}-\dfrac{1-\cos(n+1)t}{4\sin^2\dfrac{t}{2}}$ et

$$\sum_{k=1}^{n} k\sin kt=\frac{\sin(n+1)t}{4\sin^2\dfrac{t}{2}}-\frac{\mathrm{n}\cos\dfrac{(2n+1)}{2}t}{2\sin\dfrac{t}{2}}$$

EXERCICE157 : Montrer que pour tout entier $p\geq 1$ il existe des réels $a_0,a_1,...........,a_p$ avec $a_P\neq 0$ tel que pour tout réel t , on a : $\cos 2pt=a_0+a_1\sin^2 t+a_2\left(\sin^2 t\right)^2+.........+a_p\left(\sin^2 t\right)^p$

I.S : soit $t\in\mathbb{R}$ et $z=\cos t+i\sin t$

On a : d'après la formule d'EULER, $\cos 2pt=\dfrac{z^{2p}+z^{-2p}}{2}=\dfrac{1}{2}\left[\left(\cos t+i\sin t\right)^{2p}+\left(\cos t+i\sin t\right)^{-2p}\right]$

En utilisant la formule binomiale, on obtient :

$$\cos 2pt=C_{2p}^{0}\cos^{2p}t-C_{2p}^{2}\cos^{2p-2}\sin^2 t+......+(-1)^p C_{2p}^{2p}\sin^{2p}t$$

Ainsi donc $\cos 2pt$ est un polynôme de degré p de $\sin^2 t$ et donc il existe des réels $a_0,a_1,......,a_p$ tels que

$\cos 2pt=a_0+\mathrm{a}_1\sin^2 t+......+a_p\left(\sin^2 t\right)^p$

EXERCICE158 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes :

$C = \sum_{k=0}^{k=n} cos(k\theta)$, $S = \sum_{k=0}^{k=n} sin(k\theta)$, $K = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k cos(k\theta)$ et $L = \sum_{k=0}^{k=n} cos(k\theta + \varphi)$

I.S : Posons $\Sigma = C + iS = \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos(k\theta) + i\sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{k=n-1} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(e^{i\theta}\right)^k$

Si $e^{i\theta} \neq 1$, alors $\Sigma = \dfrac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{n\theta}{2}}$

En considérons les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$C = \frac{\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \quad et \quad S = \frac{\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

EXERCICE159 : Pour $\theta \in \mathbb{R} \ \ et \ \ n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

$$C = \sum_{k=0}^{k=n} cos^k(\theta) cos(k\theta) \quad et \quad S = \sum_{k=0}^{k=n} cos^k(\theta) sin(k\theta)$$

I.S : Posons $\Sigma = C + iS = \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos^k \theta\left(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\right) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\cos\theta \cdot e^{i\theta}\right)^k$

Si $\cos\theta \cdot e^{i\theta} \neq 1$ alors $\Sigma = \dfrac{1 - \cos^{n+1}\theta \cdot e^{i(n+1)\theta}}{1 - \cos\theta \cdot e^{i\theta}}$

Or $1 - \cos x \cdot e^{ix} = -i\sin x \cdot e^{ix}$ donc $\Sigma = \dfrac{1 - \cos^{n+1}\theta \cdot e^{i(n+1)\theta}}{1 - \cos\theta \cdot e^{i\theta}} = \dfrac{-i\sin(n+1)\theta \cdot e^{i(n+1)\theta}}{-i\sin\theta \cdot e^{i\theta}} = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} e^{in\theta}$

Par suite $C = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \cos n\theta \ \ et \ \ S = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \sin n\theta$

EXERCICE160 : Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ \ et \ \ n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k cos(ak + b)$

I.S : on a $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k cos(ak+b) = Re\left(\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k e^{i(ak+b)}\right) = Re\left(e^{ib} \cdot \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k e^{iak}\right)$

Donc $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k cos(ak+b) = Re\left(e^{ib} \cdot \left(1 + e^{ia}\right)^n\right) = Re\left(e^{ib} \cdot 2^n cos^n\left(\dfrac{a}{2}\right) e^{in\frac{a}{2}}\right) = 2^n cos^n\left(\dfrac{a}{2}\right) \cdot cos\left(\dfrac{na}{2} + b\right)$

EXERCICE161 : Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\quad et \quad n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{cos(kx)}{cos^k(x)}$

I.S : on a $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{cos(kx)}{cos^k(x)} = Re\left(\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} C_n^k \cdot \left(\frac{e^{ix}}{cos(x)}\right)^k\right) = Re\left(\frac{e^{ix}}{cos(x)} - 1\right)^n$

Donc $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{cos(kx)}{cos^k(x)} = Re\left(i\,tan(x)\right)^n = Re\left(e^{i\frac{n\pi}{2}} tan^n(x)\right) = cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) tan^n(x)$

Par suite $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{cos(kx)}{cos^k(x)} = \begin{cases} 0 \ \ si\ n\ est\ impair \\ (-1)^{\frac{n}{2}} tan^n(x) \ \ si\ n\ est\ pair \end{cases}$

EXERCICE162 : Montrer que $\prod_{k=1}^{k=n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

I.S : on a $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{k=n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ et en passant aux dérivées, on obtient $nX^{n-1} = \sum_{j=0}^{j=n-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$

Et ainsi pour $X=1$ on obtient $n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}}$

Puisque $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0 \quad pour \quad 1 \le k \le n-1$ et en passant aux modules, $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

EXERCICE163 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{k=n} |cos\, k| \ge \frac{n}{4}$

I.S : on procède par récurrence

Il est facile de vérifier que cette propriété est vraie pour $n = 1, 2, 3$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $(n+1)$

En effet, $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{k=n+1} |\cos k| \ge \sum_{k=1}^{k=n+1} \cos^2 k = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1+\cos 2k}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n+1} \cos 2k$

Or $\left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n+1} \cos 2k\right| = \frac{1}{2}\left|\text{Re}\left(\sum_{k=1}^{k=n+1} e^{i2k}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\text{Re}\left(e^{i2} \cdot \frac{e^{i2(n+1)} - 1}{e^{2i} - 1}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\text{Re}\left(\frac{e^{i(n+3)}\left(e^{i(n+1)} - e^{-i(n+1)}\right)}{e^i \sin 1}\right)\right|$

$$= \left|\text{Re}\left(\frac{e^{i(n+3)} \sin(n+1)}{e^i \sin 1}\right)\right| = \left|\frac{\cos(n+1) + \sin(n+1)}{\sin 1}\right| \le \frac{1}{\sin 1} \le \frac{n}{2}$$

pour $n \ge \frac{2}{\sin 1}$ ou encore $n \ge 3$

EXERCICE164 : Soit $m \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_m = \int_0^{\pi} sin^{2m}(t)cos(2mt)dt$

I.S : on a $\sin^{2m}(t)\cos(2mt) = \mathrm{Re}\left(e^{2imt}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2}\right)^{2m}(-1)^m\right) = \frac{(-1)^m}{4^m}\mathrm{Re}\left(e^{2imt}\sum_{k=0}^{k=n}C_{2m}^k\left(-e^{-it}\right)^k\left(e^{it}\right)^{2m-k}\right)$

Donc $\sin^{2m}(t)\cos(2mt) = \frac{(-1)^m}{4^m}\sum(-1)^k\cos(2mt - kt + (2m-k)t)$

Puisque $\int_0^{\pi}\cos(kt)dt = 0 \ \ si \ k \neq 0 \ \ et \ = \pi \ \ pour \ \ k = 0$

alors $I_m = \frac{(-1)^m}{4^m}\sum_{k=0}^{k=2m}C_{2m}^k(-1)^k\pi\delta_{(4m-2k,0)} = \frac{(-1)^m}{4^m}\pi$ avec $\delta_{(4m-2k,0)} = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ 4m-2k = 0 \\ 0 \ \ si \ \ 4m-2k \neq 0 \end{cases}$

EXERCICE165 : Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls, distincts et tels que : $|a| = |b| = |c|$

1- Montrer que si l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une racine de module 1 alors $b^2 = ac$

2- Montrer que si les deux équations : $az^2 + bz + c = 0$ et $bz^2 + cz + a = 0$ ont chacune une racine de module 1 alors $|a-b| = |b-c| = |c-a|$

I.S : 1- Soient $z \ et \ t$ les deux racines de l'équation avec $|z| = 1$

puisque $t = \frac{c}{a}\frac{1}{z}$ alors $|t| = \left|\frac{c}{a}\right|\left|\frac{1}{z}\right| = 1$ car $|a| = |c|$

et puisque $z + t = -\frac{b}{a}$ et que $|a| = |b|$ alors $|z+t| = 1$ et donc $|z+t|^2 = (z+t)\left(\bar{z}+\bar{t}\right) = 1$

ou encore $(z+t)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right) = 1$ soit que $(z+t)^2 = zt$ ce qui donne $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c}{a}$ soit que $b^2 = ac$

2- d'après la question (i) on a : $b^2 = ac$ et $c^2 = ab$ soit que $b^2c^2 = a^2bc$ donc $a^2 = bc$

par suite $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ on en déduit que $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

donc $(a-b)^2 + (b-c)^2 + 2(a-b)(b-c) + (c-a)^2 = 2(a-b)(b-c)$

ce qui implique que $(a-c)^2 = (a-b)(b-c)$ et donc $|a-c|^2 = |a-b||b-c|$

de la même manière on montre que : $|a-b|^2 = |a-c||b-c|$ et $|b-a|^2 = |a-c||b-c|$

ce qui achève la démonstration.

EXERCICE166 : Sachant que λ est un réel et que n est un entier supérieur ou égal à 2 , résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\lambda\left(\bar{z}+z^n\right) = i\left(\bar{z}-z^n\right)$

I.S : l'équation est équivalente à l'équation : $z^n(\lambda + i) = \bar{z}(-\lambda + i)$

En passant aux modules dans les deux membres de cette nouvelle équation on obtient $\left|z^n\right| = |z|$

donc $|z| = 0 \ \ ou \ \ |z| = 1$

Si $|z| = 0$ alors $z = 0$ et c'est bien une solution de l'équation proposée.

Si $|z|=1$ alors $\bar{z}=\frac{1}{z}$ et donc l'équation peut être sous la forme : $z^{n+1}=\frac{-\lambda+1}{\lambda+1}$

Puisque $\left|\frac{-\lambda+1}{\lambda+1}\right|=1$ alors il existe $\theta\in[0;2\pi[$ tel que $\frac{-\lambda+1}{\lambda+1}=e^{i\theta}$ et donc $z=e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n+1}}$ pour $k=0,1,.....,n$

et donc l'équation admet $n+1$ solutions qui sont : 0 et les $z_k=e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n+1}}$ avec $k\in\{0,1,.......,n\}$ et

$\vartheta\equiv\arg\frac{-\lambda+1}{\lambda+1}\quad[2\pi]$

EXERCICE167 : Considérons le sous-ensemble $A=\{z\in\mathbb{C} : z=a+ib,\ \ a>0\ , |z|<1\}$

Montrer que pour tout $z\in A$ il existe un nombre $x\in A$ tel que : $z=\frac{1-x}{1+x}$

I.S : Soit $z\in A$. L'équation $z=\frac{1-x}{1+x}$ d'inconnue x a pour solution

$x=\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-a-ib}{1+a+ib}$ avec $a>0$ et $a^2+b^2<1$

Puisque $|x|^2=\frac{(1-a)^2+b^2}{(1+a)^2+b^2}<1$ si et seulement si $(1-a)^2<(1+a)^2$ ou encore $4a>0$ ce qui est vrai

et que $\operatorname{Re}(x)=\frac{1-|z|^2}{|1+z|^2}>0$ puisque $|z|<1$ alors $x\in A$

EXERCICE168 : Considérons l'équation à coefficients réels : $x^6+ax^5+bx^4+cx^3+bx^2+ax+1=0$
on note $x_1,x_2,.....,x_6$ ses racines dans $\mathbb{C}$

Montrer que : $\prod_{k=1}^{k=6}(x_k^2+1)=(2a-c)^2$

I.S : Posons $P(x)=x^6+ax^5+bx^4+cx^3+bx^2+ax+1$

Par hypothèse on a : $P(x)=\prod_{k=1}^{k=6}(x-x_k)=\prod_{k=1}^{k=6}(x_k-x)$ pour tout $x\in\mathbb{C}$

Donc $\prod_{k=1}^{k=6}(x_k^2+1)=\prod_{k=1}^{k=6}(x_k+i)(x_k-i)=P(-i)\cdot P(i)$ et en développant les calculs de $P(i)$ *et* $P(-i)$ on trouve que $\prod_{k=1}^{k=6}(x_k^2+1)=(2a-c)^2$

EXERCICE169 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z-1)^n=(z+1)^n$

I.S : remarquons que $z=-1$ n'est pas une solution et donc

$(z-1)^n=(z+1)^n \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n=1$

$$\Leftrightarrow \quad \exists k \in \{0,1,2,\dots\dots,n-1\} \quad ; \quad \frac{z-1}{z+1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists k \in \{0,1,2,\dots\dots,n-1\} \quad ; \quad z\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = \left(1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$$

Si $k=0\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}=1\right)$, on aura $z\cdot 0=2$ et donc l'équation n'admet pas de solution

Si $k \in \{1,2,\dots\dots,n-1\}$, alors $z=\dfrac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}=\dfrac{2\cos\frac{k\pi}{n}e^{i\frac{k\pi}{n}}}{-2i\sin\frac{k\pi}{n}e^{i\frac{k\pi}{n}}}=i\cot an\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

En conclusion les solutions de cette équations sont les imaginaires pur $i\cot an\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour

$k \in \{1,2,\dots\dots,n-1\}$

EXERCICE170 : Calculer les deux sommes $S_1 = cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)+cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)+cos\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$ et

$S_2 = sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)+sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)+sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$

I.S : soit u une racine septième de l'unité $\left(u^7=1\right)$

Posons $s=u+u^2+u^4$,

on a : $\bar{s}=\bar{u}+\overline{u^2}+\overline{u^4}=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{1}{u^4}=\dfrac{1+u^2+u^3}{u^4}$ puisque $|u|=|u^2|=|u^4|=1$

de plus $u^7=1$ donc $\dfrac{1}{u^4}=u^3$ et par suite $\bar{s}=\left(1+u^2+u^3\right)\cdot u^3=u^3+u^5+u^6$

on a : $s+\bar{s}=u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6=u\cdot\dfrac{1-u^6}{1-u}=\dfrac{u-u^7}{1-u}=-1$

et $s\cdot\bar{s}=\left(u+u^2+u^4\right)\left(u^3+u^5+u^6\right)=3+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6=2$

donc s *et* $\bar{s}$ sont les deux solutions de l'équation : $t^2+t+2=0$ dont les racines sont :

$-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ *et* $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

on remarque que $\operatorname{Im}(s)=\operatorname{Im}\left(u+u^2+u^4\right)=\sin\dfrac{2\pi}{7}+\sin\dfrac{4\pi}{7}+\sin\dfrac{8\pi}{7}>0$ puisque $0<\dfrac{\pi}{7}<\dfrac{2\pi}{7}<\dfrac{\pi}{2}$

donc $s=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ et par suite $S_1=\operatorname{Re}(s)=-\dfrac{1}{2}$ *et* $S_2=\operatorname{Im}(s)=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

EXERCICE171 : Caractériser les nombres complexes a *et* b tels que : $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

I.S : analyse , soient $a\,et\,b$ tels que $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ alors $ab=(a+b)^2$

Si on pose $S=a+b$ alors $a\,et\,b$ sont les deux solutions de l'équation $z^2-Sz+S^2=0$ (formules de VIETTE).

Les deux solutions de cette équation sont : $z=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}(a+b)$ et on a donc puisque $a\,et\,b$ jouent le même rôle, $a=-jS\ \ et\ b=-j^2S$ ou $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ une racine cubique de 1

Synthèse, si on pose $a=-jS\ et\ \ b=-j^2S$ avec $S\in\mathbb{C}^*$ quelconque, alors

$a+b=-\left(j+j^2\right)S=S\ \ \left(puisque\ 1+j+j^2=0\right)$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{S}=\frac{1}{a+b}$

En conclusion, les solutions sont les nombres complexes de la forme $a=-jS\ \ et\ b=-j^2S$ avec $S\in\mathbb{C}^*$ quelconque

EXERCICE172 : On fixe $n\in\mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^n=\overline{z}$

I.S : notons (E) l'équation $z^n=\overline{z}$ et posons $z=\rho e^{ix}$ avec $\rho>0$

On a $(E)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} nx\equiv -x\ [2\pi] \\ \rho^n=\rho \end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} (n+1)x\equiv 0\ [2\pi] \\ \rho^n=\rho \end{cases}$

* 0 est une solution triviale (si $n\neq 0$)

* si $n=1$ alors $-1\ \ et\ \ 1$ sont solutions

* si $n>1$, alors $\rho^n=\rho\ \Leftrightarrow\ \rho^{n-1}=1\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \rho=1\ \ si\ \ n\ est\ \ pair \\ \rho=\pm 1\ \ si\ n\ est\ impair \end{cases}$

Et $x=\frac{2\pi k}{n+1}\ \ avec\ \ k\in\mathbb{Z}$, soit que $\begin{cases} z=e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}\ \ si\ \ n\ est\ \ pair \\ z=\pm e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}\ \ si\ n\ est\ impair \end{cases}$

EXERCICE173 : Soient $z\ ,s\ \ et\ \ t$ trois nombres complexes tels que : $|z|=|s|=|t|=R$ et $s\neq t$

Montrer que : $\underbrace{min}_{a\in\mathbb{R}}|as+(1-a)t-z|=\frac{1}{2R}|z-s|\cdot|z-t|$

I.S : Posons $u=as+(1-a)t$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $M,S,T\,et\,U$ les points d'affixes $z,s,t\,et\,u$ respectivement.

Par hypothèse, le centre du cercle circonscrit au triangle MST est centré à l'origine du plan complexe.

Notons aussi que le point U se trouve sur la droite (ST) et donc $MU=|u-z|$ est plus grande ou égale à la hauteur MB du triangle MST issue du sommet M

Il suffit donc de montrer que $MB=\frac{1}{2R}|z-t||z-s|=\frac{1}{2R}MS.MT$

Or $MB=\frac{2aire[MST]}{ST}=\frac{2\frac{MS.ST.TM}{4R}}{ST}=\frac{MS.MT}{2R}$ ce qu'il fallait démontrer.

EXERCICE174: Soient a, b, c, d quatre nombres complexes deux à deux disjoints et tels que :

$$Re\left(\frac{b-a}{d-a}\right)=Re\left(\frac{b-c}{d-c}\right)=0$$

1- Trouver tous les entiers naturels n tels que : $|b-a|^n+|d-a|^n\leq|b-d|^n\leq|b-c|^n+|d-c|^n$

2- Montrer que : $|c-a|\leq|d-b|$

I.S : Dans le plan complexe, considérons les points $A, B, C\ et\ D$ d'affixes a, b, c, d respectivement.

1- la condition $Re\left(\frac{b-a}{d-a}\right)=Re\left(\frac{b-c}{d-c}\right)=0$ implique que $\widehat{BAD}\ et\ \widehat{BCD}$ sont des angles droit

donc $|a-b|=AB\ et\ |a-d|=AD$ sont les côtés du triangle ABDrectangle en A dont l'hypoténuse est $BD=|b-d|$ et donc l'inégalité $AB^n+AD^n\leq BD^n$ est valable pour $n\geq 2$

de même $|b-c|=BC\ et\ |d-c|=CD$ sont les côtés du triangle BCDrectangle en C et dont l'hypoténuse est $BD=|b-d|$, donc l'inégalité $BD^n\leq BC^n+CD^n$ est valable pour $n\leq 2$

par conséquent $n=2$

2- on a : $AC=|a-c|\leq BD=|d-b|$ puisque AC est une corde du cercle de diamètre BD

EXERCICE175: Soit un entier $n\geq 3$ et $(\alpha,\beta,\lambda)\in U^3$ tel que $\alpha^n=\beta^n=\lambda^n=1$ et $\alpha+\beta+\lambda=0$

Montrer que $n\equiv 0\ \ [3]$

I.S : on suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé d'origine O

et on considère les points $A(\alpha), B(\beta)\ et\ C(\lambda)$

on a $\alpha+\beta+\lambda=0\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ donc O est le centre de gravité du triangle ABC

or $|\alpha^n|=1$ donc $|\alpha|=1$ et par suite $|\beta|=|\lambda|=|\alpha|=1$ donc $OA=OB=OC=1$

donc O est le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité de ABC et donc ABC est équilatéral. D'où $\alpha=j\beta$ ou $\alpha=j^2\beta$

si $\alpha^n=(j\beta)^n=\beta^n$ alors $j^n=1$ donc $e^{i\frac{2\pi n}{3}}=1$ soit que $\frac{2\pi n}{3}\equiv 0\ \ [2\pi]$ et donc $n\equiv 0\ \ [3]$

si $\alpha^n=\left(j^2\beta\right)^n=\beta^n$ alors $j^{2n}=1$ donc $e^{i\frac{\pi n}{3}}=-1$ et donc $\frac{\pi n}{3}\equiv\pi\ \ [2\pi]$ soit que $n\equiv 0\ \ [3]$

EXERCICE176: Soient $ABCD$ et $BNMK$ deux carrés et soit E le milieu du segment $[AN]$.

Si F est la projection orthogonale de B sur la droite (CK) , montrer que les points $E\ , F\ et\ B$ sont alignés.

I.S : Considérons le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct d'origine F et dont l'axe des imaginaire est (FB)

Soient c, k, ib les affixes respectives des points C, B, K (c, k, b sont des réels)

La rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme $C\ en\ A$ donc A a pour affixe $a=b(1-i)+ci$

De même, La rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme K en N donc N a pour affixe $n=b\left(1+i\right)-ki$

Le milieu E du segment $\left[AN\right]$ a pour affixe $e=\frac{a+n}{2}=b+\frac{c-k}{2}i$ et donc $E\in\left(FB\right)$

EXERCICE177: Sur les côtés $AB\ ,BC\ ,CD\ et\ DA$ d'un quadrilatère et à l'extérieur de ce quadrilatère , on construit quatre carrés de centres respectivement $O_1\ ,\ O_2\ ,\ O_3\ et\ O_4$

Montrer que : $\left(O_1O_3\right)\perp\left(O_2O_4\right)$ et $O_1O_3=O_2O_4$

I.S : Posons $ABMM',\ BCNN',CDPP'\ et\ DAQQ'$ les quatre carrés de centre respectivement $O_1\ ,\ O_2\ ,\ O_3\ et\ O_4$

Le point M est obtenu du point A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc son affixe est $m=b+\left(a-b\right)i$ et de même on obtient $n=c+\left(b-c\right)i$, $p=d+\left(c-d\right)i\ \ et\ \ q=a+\left(d-a\right)i$

Ce qui donne $\left(O_3O_1\right)\perp\left(O_4O_2\right)\ \ et\ \ O_3O_1=O_4O_2$

$$o_1=\frac{a+m}{2}=\frac{a+b=\left(a-b\right)i}{2}\ ,\ o_2=\frac{b+c+\left(b-c\right)i}{2}\ ,\ o_3=\frac{c+d+\left(c-d\right)i}{2}\ \ et\ \ o_4=\frac{d+a+\left(d-a\right)i}{2}$$

Donc $\frac{o_3-o_1}{o_4-o_2}=-i\in i\mathbb{R}$ et par suite puisque $\left|\frac{o_3-o_1}{o_4-o_2}\right|=1$ et $\arg\left(\frac{o_3-o_1}{o_4-o_2}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\ \ \left[2\pi\right]$

EXERCICE178: Soit ABO un triangle équilatéral de centre S et soit $A'B'O$ un autre triangle équilatéral avec la même orientation et $S\neq A'\ et\ S\neq B'$

Considérons $M\ \ et\ \ N$ les milieux des segments $A'B\ et\ AB'$. Montrer que $SB'M\ et\ SA'N$ sont semblables d'orientations opposées.

I.S : considérons le plan complexe d'origine au point S et tel que le point O a pour affixe un réel positif et posons $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Les affixes des points $O\,,A\ et\ B$ sont, respectivement $R,\varepsilon R\ et\ \varepsilon^2R$

Soit $R+z$ l'affixe du point B' , donc $R-\varepsilon z$ est l'affixe du point A' .

Ainsi les affixes des milieux $M\ \ et\ \ N$ sont :

$$z_M=\frac{z_B+z_{A'}}{2}=\frac{-\varepsilon\left(R+z\right)}{2}\quad \text{et}\quad z_N=\frac{z_A+z_{B'}}{2}=\frac{R-\varepsilon z}{-2\varepsilon}$$

Or on a $\frac{z_{B'}-z_S}{z_M-z_S}=\frac{z_{A'}-z_S}{z_N-z_S}\ \Leftrightarrow\ \frac{R+z}{\frac{-\varepsilon\left(R+z\right)}{2}}=\frac{R-\varepsilon z}{\frac{R-\varepsilon z}{-2\varepsilon}}\ \Leftrightarrow\left|\varepsilon\right|^2=1$ et donc les triangles $SB'M\ et\ SA'N$ sont semblables d'orientations opposées.

EXERCICE179 : Sur les côtés d'un triangle ABC et à l'extérieur de ce dernier on construit trois triangles isocèles et d'angle aux sommets $\frac{2\pi}{n}$ (n étant un entier naturel non nul) .
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles les centres de ces triangles forment un triangle équilatéral.

I.S : soient M,N,P les sommets de ces triangles construit respectivement sur BC,CA,AB et a,b,c,m,n,p les affixes respectifs de ses points.

Les angles $\widehat{APB},\widehat{BMC},\widehat{ANC}$ ont pour mesure $\frac{2\pi}{n}$

Si on pose $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ alors $a = p+\varepsilon(b-p)$, $b = m+\varepsilon(c-m)$ et $a = n+\varepsilon(a-n)$

Donc $m = \frac{b-\varepsilon c}{1-\varepsilon}$, $n = \frac{c-\varepsilon a}{1-\varepsilon}$ et $p = \frac{a-\varepsilon b}{1-\varepsilon}$

MNP est équilatéral si et seulement si $m^2+n^2+p^2 = mn+np+pm$

Donc $(b-\varepsilon c)^2+(c-\varepsilon a)^2+(a-\varepsilon b)^2 = (b-\varepsilon c)(c-\varepsilon a)+(c-\varepsilon a)(a-\varepsilon b)+(a-\varepsilon b)(b-\varepsilon c)$

Ce qui donne $(1+\varepsilon+\varepsilon^2)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] = 0$ et donc $1+\varepsilon+\varepsilon^2 = 0$

soit que $\varepsilon = j$ ou encore $n=3$

EXERCICE180 : Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles équilatérales qui ont même orientation. Montrer que les cotés $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ sont les côtés d'un triangle.

I.S :soient a,b,c,a',b',c' les affixes respectifs des points A,B,C,A',B',C'

Puisque ABC et $A'B'C'$ sont semblables (puisque équilatéraux) alors $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$

Soit que $a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b) = 0$

De plus on a cette relation évidente : $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b) = 0$

Ainsi donc $(a'-a)(b-c)+(b'-b)(c-a)+(c'-c)(a-b) = 0$

En passant aux modules, on obtient $|a'-a||b-c| \le |b'-b||c-a|+|c'-c||a-b|$

Ce qui donne $AA' \le BB'+CC'$ puisque $|b-c| = |c-a| = |a-b|$

De la même manière on montre que $BB' \le CC'+AA'$ et $CC' \le AA'+BB'$ c.q.f.d

EXERCICE181 : Soit ABC un triangle et P un point du plan .
On pose : $\alpha = BC$, $\beta = AC$ et $\gamma = AB$, montrer que : $\alpha.PB.PC+\beta.PC.PA+\gamma.PA.PB \ge \alpha\beta\gamma$

I.S : on considère le plan complexe avec P comme origine du repère et soient a,b,c les affixes respectifs des points A,B,C

A partir de l'identité algébrique $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$ et en passant aux modules, on obtient : $\dfrac{|b||c|}{|a-b||a-c|}+\dfrac{|c||a|}{|b-c||b-a|}+\dfrac{|a||b|}{|c-a||c-b|}\geq 1$

Soit que $\dfrac{PB.PC}{\beta\gamma}+\dfrac{PC.\mathrm{PA}}{\gamma\alpha}+\dfrac{PA.\mathrm{PB}}{\alpha\beta}\geq 1$ c.q.f.d

EXERCICE182 : Soit ABC un triangle de centre le point P et R le rayon de son cercle circonscrit.
Soit R_1, R_2, R_3 respectivement le rayon du cercle circonscrit au cercle PBC, PCA, PAB .
Montrer que : $R_1+R_2+R_3\geq 3R$

I.S : d'après l'exercice précédent, on a $\alpha.PB.PC+\beta.PC.PA+\gamma.PA.PB\geq\alpha\beta\gamma$ avec α,β,γ les longueurs des cotés du triangle ABC

Or $\alpha.PB.PC=4R_1.Aire\left(PBC\right)=4R_1.\dfrac{1}{3}.Aire\left(ABC\right)$, $\beta.PC.PA=4R_2.\dfrac{1}{3}.Aire\left(ABC\right)$

Et $\gamma.PA.PB=4R_3.\dfrac{1}{3}.Aire\left(ABC\right)$

On en déduit que $\dfrac{4}{3}\left(R_1+R_2+R_3\right).Aire\left(ABC\right)\geq 4R.Aire\left(ABC\right)$ soit que $R_1+R_2+R_3\geq 3R$

EXERCICE183 : Soit $a\ ,b\ ,c\ et\ d$ quatre nombres complexes deux à deux distincts et tels que :
$|a|=|b|=|c|=|d|$ et $a+b+c+d=0$
Montrer que les points d'affixe $a\ ,b\ ,c\ et\ d$ respectivement sont les sommets d'un rectangle.

I.S : on a $a+b+c+d=0$ donc $a+d=-\left(b+c\right)$ et donc $|a+d|^2=|b+c|^2$ soit que

$|a|^2+|d|^2+2\operatorname{Re}\left(a\overline{d}\right)=|b|^2+|c|^2+2\operatorname{Re}\left(b\overline{c}\right)$ et puisque $|a|=|b|=|c|=|d|$ alors $\operatorname{Re}\left(a\overline{d}\right)=\operatorname{Re}\left(b\overline{c}\right)$

Soit que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ donc $\widehat{AOD}=\widehat{COB}$

De plus $AD^2=|a-d|^2=|a|^2+|d|^2-2\operatorname{Re}\left(a\overline{d}\right)$

Et $BC^2=|b-c|^2=|b|^2+|c|^2-2\operatorname{Re}\left(b\overline{c}\right)$ par suite puisque $\operatorname{Re}\left(a\overline{d}\right)=\operatorname{Re}\left(b\overline{c}\right)$ et $|a|=|b|=|c|=|d|$ alors $BC=AD$ et donc $ABCD$ est un rectangle.

EXERCICE184 : Soit ABC un triangle. Montrer que pour tout point M du plan on a :
$AM\sin\widehat{A}\leq BM\sin\widehat{B}+CM\sin\widehat{C}$

I.S : considérons le plan complexe avec M comme origine du repère et posons a,b,c les affixes des points A,B,C respectivement.

Puisque $a\left(b-c\right)=b\left(a-c\right)+c\left(b-a\right)$ alors $|a||b-c|\leq|b||a-c|+|c||b-a|$ soit que

$AM.BC\leq BM.AC+CM.AB$ ou encore que $2R.AM.\sin\widehat{A}\leq 2R.BM.\sin\widehat{B}+2R.CM.\sin\widehat{C}$ où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

Soit que $AM.\sin\widehat{A}\leq BM.\sin\widehat{B}+CM.\sin\widehat{C}$

EXERCICE185 : Sur chaque côté d'un parallélogramme, un carré est tracer à l'extérieur du parallélogramme. Montrer que les centres de ces carrés sont les sommets d'un autre carré.

I.S : considérons le plan complexe d'origine le point d'intersection des diagonales du parallélogramme $ABCD$. Soit $a, b, -a$ et $-b$ les affixes des points A, B, C et D respectivement.

Si O_1 désigne le centre du carré sur le côté $[AB]$ alors B est l'image de A par la rotation de centre O_1 et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ donc $b=(-i)(a-z_1)+z_1$ ce qui donne $z_1=\frac{b+ia}{1+i}$

De la même manière on obtient : $z_2=\frac{a-ib}{1+i}$, $z_3=\frac{-b-ia}{1+i}$ et $z_4=\frac{-a+ib}{1+i}$

Ainsi donc $\widehat{O_4O_1O_2}=\arg\frac{z_2-z_1}{z_4-z_1}=\frac{\pi}{2}$ et $O_1O_2=O_1O_4$

De même $\widehat{O_2O_3O_4}=\arg\frac{z_4-z_3}{z_2-z_3}=\frac{\pi}{2}$ et $O_1O_2=O_1O_4$ par suite $O_1O_2O_3O_4$ est un carré.

EXERCICE186 : Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier. Soit M un point de la diagonale $[AC]$ et N un point de la diagonale $[CE]$ telle que : $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$

Déterminer r sachant que les points B , M et N soient alignés.

I.S : considérons le plan complexe centré au point O, centre du l'hexagone régulier et tels que $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5$ soient les affixes des points B, C, D, E, F, A respectivement.($\varepsilon=e^{i\frac{\pi}{3}}$)

Puisque $\frac{MC}{MA}=\frac{NE}{NC}=\frac{1-r}{r}$ alors $m=\varepsilon r+\varepsilon^5(1-r)$ et $n=\varepsilon^2 r+\varepsilon(1-r)$

Les points B, M et N sont alignés si et seulement si $\frac{m-1}{n-1}\in\mathbb{R}^*$

On a $m-1=\varepsilon r+\varepsilon^5(1-r)-1=\varepsilon r-\varepsilon^2(1-r)-1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}(2r-1)$

Et $n-1=\varepsilon^3 r+\varepsilon(1-r)-1=-r+\varepsilon(1-r)-1=-\frac{1}{2}-\frac{3r}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}(1-r)$

Donc $\frac{m-1}{n-1}=\frac{-1+i\sqrt{3}(2r-1)}{-(1+3r)+i\sqrt{3}(1-r)}\in\mathbb{R}^*$ si et seulement si $\operatorname{Im}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}(2r-1)}{-(1+3r)+i\sqrt{3}(1-r)}\right)=0$

Si et seulement si $\sqrt{3}(1-r)-(1+3r)\cdot\sqrt{3}(2r-1)=0$ ce qui est équivalent à $r^2=\frac{1}{3}$ ou encore $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXERCICE187 : On considère trois triangles équilatéraux OAB , OCD et OEF qu'on suppose de même sens. Montrer que les milieux des segments BC , DE et FA sont les sommets d'un triangle équilatéral.

I.S : : considérons le plan complexe centré au point O, et soient a,b,c,d,e,f,m,n,p les affixes des points A,B,C,D,E,F,M,N,P avec M,N,P désignent les milieux des segments BC , DE et FA respectivement.

Si on pose $\varepsilon = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $b = a\varepsilon$, $d = c\varepsilon$, $f = e\varepsilon$

Et $m = \dfrac{b+c}{2} = \dfrac{a\varepsilon + c}{2}$, $n = \dfrac{d+e}{2} = \dfrac{c\varepsilon + e}{2}$, $p = \dfrac{f+a}{2} = \dfrac{e\varepsilon + a}{2}$

Or $m + \varepsilon^2 n + \varepsilon^4 p = m + \varepsilon^2 n - \varepsilon p = \dfrac{1}{2}\left(a\varepsilon + c - c + e\varepsilon^2 - e\varepsilon^2 - \varepsilon a\right) = 0$ et $\varepsilon^2 = j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Alors $m + jn + j^2 p = 0$ et donc le triangle MNP est équilatéral.

EXERCICE188 : On construit sur les côtés d'un triangle ABC et à l'extérieur du triangle, les carrés $BCPQ$ et $ACMN$. On note D et E les centres respectifs de ces carrés, G le milieu de $[AB]$ et F le milieu de $[MP]$. Montrer que $EGDF$ est un carré.

I.S : soit dans le plan complexe, a,b,c,d,e,f,g,m,n,p,q les affixes des points A,B,C,D,E,F,G,M,N,P,Q respectivement.

On a $g = \dfrac{a+b}{2}$ et le point P se déduit du point B par la rotation de centre C et d'angle $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

Donc $p - c = i(b-c)$ et de même on a $m - c = -i(a-c)$ (rotation de centre C et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$)

Enfin on déduit que $e = \dfrac{a+m}{2} = \dfrac{(1-i)a + (1+i)c}{2}$ et $d = \dfrac{b+p}{2} = \dfrac{(1+i)b + (1-i)c}{2}$

Et donc $d - g = \dfrac{ib - a + (1-i)c}{2}$ et $e - g = \dfrac{-ia - b + (1+i)c}{2}$ ainsi $e - g = i(d-g)$

et donc $EG = DG$ et $\widehat{EGD} = \dfrac{\pi}{2}$ (est un angle droit) soit que $EGDF$ est un carré.

EXERCICE189 : Soit ω un nombre complexe fixé.

On considère l'équation $z^2 + (2 + i\omega)z + (i\omega + 2 - \omega) = 0$

On note z_1 et z_2 les deux solutions de cette équation, Ω le point d'affixe ω , A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2 .

Déterminer l'ensemble des points Ω tels que les points Ω , A et B soient alignés.

I.S : on a $z^2 + (2 + i\omega)z + (i\omega + 2 - \omega) = 0 \Leftrightarrow \left(2z - (2 + i\omega)\right)^2 = \left[i(\omega - 2)\right]^2$

Donc les deux solutions de l'équation sont : $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = -i\omega - 1 + i$

Les points Ω , A et B sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_2 - z_1}{\omega - z_1} \in \mathbb{R}$ ou $\omega = z_1$

Soit que $\frac{z_2-z_1}{\omega-z_1}=\overline{\left(\frac{z_2-z_1}{\omega-z_1}\right)}$ $ou \quad \omega=-1-i$ ce qui donne $2\omega\overline{\omega}-\left(\omega+\overline{\omega}\right)-i\left(\omega-\overline{\omega}\right)-4=0 \quad ou \quad \omega=-1-i$

Ainsi donc les points Ω , A et B sont alignés $\Leftrightarrow \ 2|\omega|^2-2\operatorname{Re}(\omega)+2\operatorname{Im}(\omega)-4=0 \quad ou \quad \omega=-1-i$

Si on pose $\omega=x+iy \ avec \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ alors

les points Ω , A et B sont alignés $\Leftrightarrow \ 2\left(x^2+y^2\right)-2x+2y-4=0 \quad ou \quad \omega=-1-i$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-x+y-2=0 \quad ou \quad \omega=-1-i$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

Le lieu des points $\Omega(\omega)$ est donc le cercle de centre le point $P\left(\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\frac{5}{2}}$

EXERCICE190 : Soit ABC un triangle, Q le milieu de $[AC]$ et R le milieu de $[AB]$. On note $\alpha,\beta \ et \lambda$ les longueurs des côtés opposés respectivement à A , B et C .

Montrer que : $\ (BQ)\perp(CR) \ \Leftrightarrow \ \beta^2+\lambda^2=5\alpha^2$

I.S : Soit a,b,c,q,r les affixes dans le plan complexe des points A,B,C,Q,R respectivement.

On a $q=\frac{a+c}{2} \quad et \quad r=\frac{a+b}{2}$

et $(BQ)\perp(CR) \ \Leftrightarrow \ \frac{r-c}{q-b}\in i\mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ \frac{r-c}{q-b}=-\overline{\left(\frac{r-c}{q-b}\right)} \ \Leftrightarrow \ (r-c)\cdot\left(\overline{q}-\overline{b}\right)+\left(\overline{r}-\overline{c}\right)\cdot(q-b)=0$

$$\Leftrightarrow 2a\overline{a}+a\overline{c}+\overline{a}c-a\overline{b}-\overline{a}b+5c\overline{b}+5\overline{c}b-4b\overline{b}-4c\overline{c}=0$$

Et $\beta^2+\lambda^2=5\alpha^2 \ \Leftrightarrow \ |a-c|^2+|a-b|^2-5|b-c|^2=0 \ \Leftrightarrow \ (a-c)\left(\overline{a}-\overline{c}\right)+(a-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right)-5(b-c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2a\overline{a}+a\overline{c}+\overline{a}c-a\overline{b}-\overline{a}b+5c\overline{b}+5\overline{c}b-4b\overline{b}-4c\overline{c}=0$$

Soit que $\ (BQ)\perp(CR) \ \Leftrightarrow \ \beta^2+\lambda^2=5\alpha^2$

EXERCICE191 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2$

I.S : on a $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2 \Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right|^2=4 \ \Leftrightarrow \ \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)-4=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(z\overline{z}\right)^2+z^2+\overline{z}^2+1-4z\overline{z}}{z\overline{z}}=0 \ \Leftrightarrow \ |z|^4+2\operatorname{Re}\left(z^2\right)-4|z|^2+1=0$$

On posant $z=x+iy \ \ avec \ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ on obtient : $\left(x^2+y^2\right)^2+2\left(x^2-y^2\right)-4\left(x^2+y^2\right)+1=0$

Soit que $\ x^4+2x^2\left(y^2-1\right)+y^4-6y^2+1=0$ et on considérons cette équation comme une équation d'inconnue x^2 , dont le discriminant est $\Delta=4\left(y^2-1\right)^2-4\left(y^4-6y^2+1\right)=16y^2$

on obtient la factorisation suivante : $x^4+2x^2\left(y^2-1\right)+y^4-6y^2+1=\left(x^2+y^2+2y-1\right)\left(x^2+y^2-2y-1\right)$

ainsi donc $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2 \Leftrightarrow x^2+y^2+2y-1=0 \;\; ou \;\; x^2+y^2-2y-1=0$

$$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2 \;\; ou \;\; x^2+(y-1)^2=2$$

Et donc l'ensemble cherché est la réunion de deux cercles, l'un est le cercle de centre le point $A(-i)$ et de rayon $\sqrt{2}$ et l'autre le cercle de centre le point $B(i)$ et de rayon $\sqrt{2}$

EXERCICE192 : On considère le polynôme $P(z)=z^3+pz+q$ avec $(p,q)\in\mathbb{C}^2$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le couple (p,q) pour que les images de ses racines forment un triangles rectangle isocèle.

I.S : soit a,b,c les trois racines de $P(z)$ et A,B,C leurs point images dans le plan complexe.

Le triangle ABC est rectangle isocèle en A si et seulement si $\begin{cases} |b-a|=|c-a| \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$

On en déduit que le triangle ABC est rectangle isocèle en A si et seulement si $b-a=\pm i(c-a)$

Si $b-a=i(c-a)$,

puisque d'après les formules de VIETTE $P(z)=z^3-(a+b+c)z^2+(ab+bc+ca)z-abc$

ainsi donc $a+b+c=0 \;\; et \;\; ab+bc+ca=p \;\; et \;\; abc=-q$

d'où en déduit que $c=\frac{1+3i}{2}a$, $b=a+i(c-a)=\frac{1-3i}{2}a$, $p=\frac{3}{2}a^2 \;\; et \;\; q=-\frac{5}{2}a^3$

et donc $p^3=\frac{27}{50}q^2$ (c'est une condition nécessaire)

réciproquement, si $p^3=\frac{27}{50}q^2$ et en posant : $a=-\frac{3q}{5p}$, $b=\frac{1-3i}{2}a \;\; et \;\; c=\frac{1+3i}{2}a$ alors

$P(a)=P(b)=P(c)=0$ (c'est une condition suffisante)

EXERCICE193 : Soit $(a,b,p)\in U^3$. On note $A,B \;et\; P$ les points d'affixe $a,b \;et\; p$ respectivement. Soit H le projeté orthogonal de P sur la droite (AB) et h son affixe.

Montrer que : $p-h=\frac{(p-a)(p-b)}{2}$ $\qquad$ ($U=\{z\in\mathbb{C} / |z|=1\}$)

I.S : on rappelle que $|z|=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1}{z}$

on a $(PH)\perp(AB) \Leftrightarrow \frac{h-p}{b-a}=-\frac{\overline{h}-\overline{p}}{\overline{b}-\overline{a}}$ et $H\in(AB) \Leftrightarrow \frac{h-a}{b-a}=\frac{\overline{h}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$

On en déduit que $\overline{h}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{a}\overline{b}h$ ensuite que $1-h=\frac{(1-a)(1-b)}{2}$

EXERCICE194 : Soit $z_1, z_2, ..., z_n$ des nombres complexes non nuls et de même module.

Montrer que : $Re\left(\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{z_j}{z_k}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{k=n} z_k=0$

I.S : Posons $S=\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{z_j}{z_k}$

On a : $S=\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\right)$ et puisque $z_k\cdot\overline{z_k}=r^2$ alors

$$S=\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{z_k}}{r^2}\right)=\frac{1}{r^2}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}\right)=\frac{1}{r^2}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2$$ et donc S est un réel

Ainsi donc $\operatorname{Re} S=S=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} z_k=0$

EXERCICE195: Soient $a \ et \ b$ deux nombres complexes tels que : $|a|=|b|=r>0$

Montrer que : $\left(\frac{a+b}{r^2+ab}\right)^2+\left(\frac{a-b}{r^2-ab}\right)^2\geq\frac{1}{r^2}$

I.S : On a $\left(\frac{a+b}{r^2+ab}\right)^2+\left(\frac{a-b}{r^2-ab}\right)^2\geq\frac{1}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{r(a+b)}{r^2+ab}\right)^2+\left(\frac{r(a-b)}{r^2-ab}\right)^2\geq 1$

Posons $a=re^{i2x} \quad et \quad b=re^{i2y}$ alors $\frac{r(a+b)}{r^2+ab}=\frac{r^2\left(e^{i2x}+e^{i2y}\right)}{r^2\left(1+e^{i(2x+2y)}\right)}=\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$

De même on a : $\frac{r(a-b)}{r^2-ab}=\frac{r^2\left(e^{i2x}-e^{i2y}\right)}{r^2\left(1-e^{i(2x+2y)}\right)}=\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}$

Donc $\left(\frac{a+b}{r^2+ab}\right)^2+\left(\frac{a-b}{r^2-ab}\right)^2=\frac{cos^2(x-y)}{cos^2(x+y)}+\frac{sin^2(x-y)}{sin^2(x+y)}\geq cos^2(x-y)+sin^2(x-y)=1$

EXERCICE196 : Soit $z_0, z_1, ..., z_n$ des nombres complexes tels que : $z_0=(1-i)^n$

et pour tout $k\in\{0;1;.......;n-1\}$; $z_{k+1}=i\frac{(n-k)}{(k+1)}z_k$

Montrer que : $|z_0|^2+|z_1|^2+.......+|z_n|^2<\frac{(3n+1)^n}{n!}$

I.S : Remarquons d'abord que $z_k=i^k\cdot C_n^k\cdot z_0$ pour tout $k\in\{0;1;.......;n-1\}$

On a : $\sum_{k=0}^{k=n}|z_k|^2=|z_0|^2\left(\sum_{k=0}^{k=n}\left(C_n^k\right)^2\right)=|z_0|^2\cdot C_{2n}^n=2^n\cdot C_{2n}^n=\frac{2^n}{n!}2n(2n-1).....(n+1)$

en appliquant l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique on obtient :

$$\sum_{k=0}^{k=n}|z_k|^2 \leq \frac{2^n}{n!}\left(\frac{2n+(2n-1)+......+(n+1)}{n}\right)^n = \frac{(3n+1)^n}{n!}$$

EXERCICE197 :Calculer la somme $S=\sum_{k=0}^{k=3n-1}(-1)^k C_{6n}^{2k+1}3^k$

I.S : on a :

$$S=\sum_{k=0}^{k=3n-1}(-1)^k C_{6n}^{2k+1}3^k=\sum_{k=0}^{k=3n-1}C_{6n}^{2k+1}(-3)^k=\sum_{k=0}^{k=3n-1}C_{6n}^{2k+1}\left(i\sqrt{3}\right)^{2k}$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{k=3n-1}C_{6n}^{2k+1}\left(i\sqrt{3}\right)^{2k+1}=\frac{1}{i\sqrt{3}}Im\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6n}$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}Im\left[2\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{6n}=0$$

EXERCICE198 : Quel est le nombre d'entiers naturels à n chiffres choisit dans l'ensemble $\{2,3,7,9\}$ qui sont divisibles par 3 ?

I.S : Soit x_n le nombre d'entiers positifs de n chiffres choisit dans l'ensemble $\{2,3,7,9\}$ et qui soit congrus à 0 modulo 3

et y_n le nombre d'entiers positifs de n chiffres choisit dans l'ensemble $\{2,3,7,9\}$ et qui soit congrus à 1 modulo 3

et z_n le nombre d'entiers positifs de n chiffres choisit dans l'ensemble $\{2,3,7,9\}$ et qui soit congrus à 2 modulo 3

Considérons le nombre complexe $j=cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3}$

il est évident que $x_n+y_n+z_n=4^n$ et que

$$x_n+y_nj+z_nj^2=\sum_{a+b+c+d=n}j^{2a+3b+7c+9d}=\left(j^2+j^3+j^7+j^9\right)^n=1$$

donc $x_n-1+jy_n+j^2z_n=0$ ce qui donne $x_n-1=y_n=z_n=k$ soit que $3k=x_n+y_n+z_n-1=4^n-1$

et donc $k=\frac{1}{3}\left(4^n-1\right)$ et finalement $x_n=k+1=\frac{1}{3}\left(4^n+2\right)$

EXERCICE199 : Montrer que l'entier $\sum_{k=0}^{k=n}C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$ n'est pas divisible par 5 pour tout entier $n\geq 0$

I.S : Par développement, on a : $\left(1+i\sqrt{2}\right)^{2n+1}=R_n+i\sqrt{2}I_n$ avec $R_n=\sum_{k=0}^{k=n}C_{2n+1}^{2k}.(-2)^{3k}$ et

$$I_n=\sum_{k=0}^{k=n}C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k}$$

En passant aux modules, on trouve : $3^{2n+1}=R_n^2+2I_n^2$

puisque $3^2 \equiv -1 \quad [5]$ alors $\quad R_n^2 + 2I_n^2 \equiv \pm 3 \quad [5]$

s'il existe un entier n tel que I_n soit divisible par 5 alors $R_n^2 \equiv \pm 3 \quad [5]$ ce qui est absurde car tout carré est congru à $0, 1 \; ou \; 4$ modulo 5

EXERCICE200 : Soient $a, b, c \; et \; d$ des nombres complexes.

Montrer que : $\quad Re(ab + cd) \leq \sqrt{\left(|a|^2 + |c|^2\right) \cdot \left(|b|^2 + |d|^2\right)}$

I.S : pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $\left|a - x\overline{b}\right|^2 = \left(a - x\overline{b}\right)\left(\overline{a} - xb\right) = |a|^2 + x^2 |b|^2 - 2\operatorname{Re}(xab)$

Donc $\left|a - x\overline{b}\right|^2 + \left|c - x\overline{d}\right|^2 = |a|^2 + |c|^2 + x^2\left(|b|^2 + |d|^2\right) - 2x\operatorname{Re}(ab + cd) \geq 0$

On en déduit que : $2x\operatorname{Re}(ab + cd) \leq |a|^2 + |c|^2 + x^2\left(|b|^2 + |d|^2\right)$

Ou encore : $\quad \operatorname{Re}(ab + cd) \leq \dfrac{|a|^2 + |c|^2}{2x} + \dfrac{x}{2}\left(|b|^2 + |d|^2\right)$

Or la fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{\alpha}{2x} + \dfrac{x\beta}{2}$ admet un minimum en $x_0 = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Donc en posons $\alpha = |a|^2 + |c|^2 \quad et \quad \beta = |b|^2 + |d|^2$ alors $x_0 = \sqrt{\dfrac{|a|^2 + |c|^2}{|b|^2 + |d|^2}}$

Et $Re(ab + cd) \leq f(x_0) = \sqrt{\left(|a|^2 + |c|^2\right) \cdot \left(|b|^2 + |d|^2\right)}$

EXERCICE201 : Soient $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_{n-1}$ $\; n$ nombres complexes tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} |a_k| < 1$ Montrer que les racines du polynôme $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots\ldots + a_0$ sont de module strictement inférieur à 1 .

I.S : On a $1 = |1 + a_0 + a_1 + \ldots.. + a_{n-1} - a_0 - a_1 - \ldots.. - a_{n-1}| \leq |1 + a_0 + a_1 + \ldots.. + a_{n-1}| + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|$

Donc $|1 + a_0 + a_1 + \ldots.. + a_{n-1}| \geq 1 - |a_0| - |a_1| - \ldots.. - |a_{n-1}|$

Ainsi $\left|\dfrac{P(z)}{z^n}\right| = \left|1 + \dfrac{a_{n-1}}{z} + \ldots.. + \dfrac{a_0}{z^n}\right| \geq 1 - \dfrac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots\ldots - \dfrac{|a_0|}{|z|^n}$

Si $|z| \geq 1$ alors $\dfrac{1}{|z|^k} \leq 1$ et donc $-\dfrac{|a_k|}{|z|^k} \geq -|a_k|$ pour t out $k \in \{0; 1; 2; \ldots.; n-1\}$

Soit que $\left|\dfrac{P(z)}{z^n}\right| \geq 1 - |a_0| - |a_1| - \ldots\ldots - |a_{n-1}| > 0$ puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} |a_k| < 1$ et donc $P(z) \neq 0$

En en déduit que si $P(z) = 0$ alors $|z| < 1$

EXERCICE202 : Calculer : $S_1 = \sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k}$, $S_2 = \sum_{0\le 2k+1\le n} C_n^{2k+1}$ et $\Delta = \sum_{0\le 3k\le n} C_n^{3k}$

I.S : on a $S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ et $S_1 - S_2 = \sum_{k\,pair} C_n^k - \sum_{k\,impair} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k = (1-1)^n = 0$

Ainsi donc $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$

De la même façon, en posant : $\Delta_0 = \sum_{0\le 3k\le n} C_n^{3k}$, $\Delta_1 = \sum_{0\le 3k+1\le n} C_n^{3k+1}$ et $\Delta_2 = \sum_{0\le 3k+2\le n} C_n^{3k}$

On a $\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ et avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Delta_0 + j\Delta_1 + j^2\Delta_2 = \sum_{0\le 3k\le n} C_n^{3k} + \sum_{0\le 3k+1\le n} j^{3k+1} C_n^{3k+1} + \sum_{0\le 3k+2\le n} \left(j^2\right)^{3k+2} C_n^{3k+2} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k j^k = (1+j)^n$

Puisque $j^3 = 1$ *et donc* $j^{3k} = 1$ et $\left(j^2\right)^{3k+2} = j$

De même $\Delta_0 + j^2\Delta_1 + j\Delta_2 = \sum_{0\le 3k\le n} C_n^{3k} + \sum_{0\le 3k+1\le n} \left(j^2\right)^{3k+1} C_n^{3k+1} + \sum_{0\le 3k+2\le n} j^{3k+2} C_n^{3k+2} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(j^2\right)^k = \left(1+j^2\right)^n$

Puisque $1 + j + j^2 = 0$ alors $3\Delta_0 = \left(\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2\right) + \left(\Delta_0 + j\Delta_1 + j^2\Delta_2\right) + \left(\Delta_0 + j^2\Delta_1 + j\Delta_2\right)$

Soit que $3\Delta_0 = 2^n + (1+j)^n + \left(1+j^2\right)^n$

Puisque $1 + j = -j^2 = \bar{j}$ et $1 + j = \overline{1+j^2}$ alors $\Delta = \Delta_0 = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\,\mathrm{Re}(1+j)^n\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$

EXERCICE203 : Soit a , b *et* c trois nombres complexes tels que : $(a-b)^7 + (b-c)^7 + (c-a)^7 = 0$
Montrer que : $|a-b| = |b-c| = |c-a|$

I.S :posons $x = a - b$, $y = b - c$ *et* $z = c - a$

On a alors $x + y + z = 0$ *et* $x^7 + y^7 + z^7 = 0$

Si $z \neq 0$, on pose $\alpha = \frac{x}{z}$ *et* $\beta = \frac{y}{z}$ et donc $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha^7 + \beta^7 = -1$

on en déduit que $\alpha^7 - (-\beta)^7 = -1 = (\alpha+\beta)\left(\alpha^6 - \alpha^5\beta + \alpha^4\beta^2 - \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 - \alpha\beta^5 + \beta^6\right)$

soit que $\alpha^6 - \alpha^5\beta + \alpha^4\beta^2 - \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 - \alpha\beta^5 + \beta^6 = 1 \quad (*)$

posons encore $s = \alpha + \beta$ *et* $p = \alpha\beta$ on obtient $\left(\alpha^6 + \beta^6\right) - p\left(\alpha^5 + \beta^5\right) + p^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) - p^3 = 1$

puisque $\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p = 1 - 2p$ et donc $\alpha^4 + \beta^4 = 1 - 4p + 2p^2$ *et* $\alpha^6 + \beta^6 = (1-2p)\left(1 - 4p + p^2\right)$

et donc en remplaçant dans $(*)$ on obtient $-7p^3 + 14p^2 - 7p + 1 = 1$ soit que $7p(p-1)^2 = 0$

et donc $p = 0$ *ou* $p = 1$

si $p = 0$ alors $\alpha = 0$ *ou* $\beta = 0$ par suite $x = 0$ *ou* $y = 0$ ce qui implique que $a = b$ *ou* $b = c$

ce qui est faux et donc $p = 1$

dans ce cas, puisque $\alpha + \beta = -1$ *et* $\alpha\beta = 1$ alors α *et* β sont les deux racines de l'équation : $x^2 + x + 1 = 0$

, et donc α *et* β sont deux racines cubiques de 1

par suite $\alpha^3=\beta^3=1$ et donc $|\alpha|=|\beta|=1$ soit que $|a-b|=|b-c|=|c-a|$

EXERCICE204: Déterminer tous les nombres complexes z tels que les points d'affixes respectives $z\ ,z^2\ ,z^3\ ,z^4$ soient dans cet ordre les sommets d'un quadrilatère inscriptible dans un cercle.

I.S : par hypothèse on a $\frac{z^3-z^2}{z-z^2}:\frac{z^3-z^4}{z-z^4}\in\mathbb{R}^*$ soit que $\frac{1+z+z^2}{z}\in\mathbb{R}^*$ ou encore $-1+\left(z+\frac{1}{z}\right)\in\mathbb{R}^*$ ce qui donne $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$

Puisque $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ z+\frac{1}{z}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\ \Leftrightarrow\ \left(z-\bar{z}\right)\left(|z|^2-1\right)=0\ \Leftrightarrow\ z\in\mathbb{R}\ ou\ |z|=1$

Si $z\in\mathbb{R}$ alors les points d'affixes respectivement $z\ ,z^2\ ,z^3\ ,z^4$ sont colinéaires et donc ce cas est à rejeter.

Si $|z|=1$ posons $z=e^{ix}$ avec $x\in[0;2\pi[$

Si $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors $0<x<2x<3x<4x<2\pi$ soit que $0<\arg z<\arg z^2<azg^3<\arg z^4<2\pi$

si $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right[$ alors $0\le 4x-2\pi<x<2x<3x<2\pi$ soit que $0<\arg^4<\arg z<\arg z^2<\arg z^3<2\pi$

si $x\in\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right[$ alors $0\le 3x-2\pi<x\le 4x-2\pi<2x<2\pi$ soit que $0<\arg^3<\arg z<\arg z^4<azg^2<2\pi$ ce qui ne respecte pas l'ordre

et ainsi on montre que les complexes qui satisfont aux conditions sont ceux de la forme e^{ix} avec $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{4\pi}{3};\pi\right[$

EXERCICE205 : Montrer qu'il n'existe aucun entier naturel non nul n tel que le nombre complexe $z=\frac{2+i}{2-i}$ soit une racine $n-iemme$ de l'unité.

I.S : Il est évident que $|z|=1$

Supposons qu'il existe un entier $n\ge 1$ tel que $z^n=1$

donc $(2+i)^n=(2-i)^n$ or $2+i=(2-i)+2i$ donc $(2-i)^n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(2-i)^{n-k}(2i)^k$

soit que $(2i)^n=(-2+i)\left[\sum_{k=1}^{k=n-1}C_n^k(2-i)^{n-k-1}(2i)^k\right]=(-2+i)(a+ib)$ avec $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$

on en déduit par passage au modules que : $2^n=5\left(a^2+b^2\right)$ et donc 5 divise 2^n ce qui est absurde.

EXERCICE206 : Soit $n\geq 3$ un entier naturel et $\omega\neq 1$ une racine $n-ieme$ de l'unité.

Montrer que : $|1-\omega|>\dfrac{2}{n-1}$ et que $\left|sin\dfrac{k\pi}{n}\right|>\dfrac{1}{n-1}$ pour tout entier k qui n'est pas un multiple de n

I.S : on a $0=\omega^n-1=(\omega-1)(\omega^{n-1}+......+\omega+1)$ et puisque $\omega\neq 1$ alors $\omega^{n-1}+......+\omega+1=0$

Ce qui est équivalent à $(\omega^{n-1}-1)+(\omega^{n-2}-1)......+(\omega-1)=-n$

ou encore $(\omega-1)(\omega^{n-2}+2\omega^{n-3}+......+(n-2)\omega+(n-1))=-n$

en passant aux modules et le fait que $|\omega|=1$ on obtient :

$$n=|\omega-1|\left|\omega^{n-2}+2\omega^{n-3}+......+(n-2)\omega+(n-1)\right|\leq|\omega-1|\left(|\omega|^{n-2}+2|\omega|^{n-3}+......+(n-2)|\omega|+(n-1)\right)$$

donc $n\leq|1-\omega|(1+2+.......+(n-1))=|1-\omega|\dfrac{n(n-1)}{2}$ ce qui donne $|1-\omega|\geq\dfrac{2}{n-1}$

Posons $\omega=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ avec k un entier qui n'est pas un multiple de n et donc $\omega\neq 1$

alors $1-\omega=1-\cos\dfrac{2k\pi}{n}-i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$

Et $|1-\omega|^2=2-2\cos\dfrac{2k\pi}{n}=4\sin^2\dfrac{k\pi}{n}\geq\dfrac{4}{(n-1)^2}$ ce qui donne $\left|\sin\dfrac{k\pi}{n}\right|\geq\dfrac{1}{n-1}$

EXERCICE207 : Soit $z_1,z_2,.......,z_n$ les affixes des sommets d'un polygone régulier.

Montrer que : $z_1^2+z_2^2+.......+z_2^n=z_1z_2+z_2z_3+........+z_nz_1$

I.S : on suppose que le polygone régulier est centré à l'origine du repère et posons $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{n}}$

On a alors $z_k=z_1\varepsilon^{k-1}$ pour tout $k\in\{1,2,......,n\}$ et dans ce cas :

$$z_1z_2+z_2z_3+.......+z_nz_1=\sum_{k=1}^{n}z_1^2\varepsilon^{2k-1}=z_1^2\varepsilon\frac{1-\varepsilon^{2n}}{1-\varepsilon^2}=z_1^2\varepsilon\frac{(1-\varepsilon^n)(1+\varepsilon^n)}{1-\varepsilon^2}=0$$

Et $\displaystyle z_1^2+z_2^2+......+z_n^2=\sum_{k=1}^{k=n}z_1^2\varepsilon^{2k-2}=z_1^2\frac{1-\varepsilon^{2n}}{1-\varepsilon^2}=0$

Donc $z_1^2+z_2^2+.......+z_2^n=z_1z_2+z_2z_3+........+z_nz_1$

EXERCICE208 : Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1 $(|z|=1)$ on a :

$$\sqrt{3}\leq|1+z|+|1-z+z^2|\leq\frac{13}{4}$$

I.S : Posons $t=|1+z|$ donc $t\in[0;2]$ puisque $0\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

On a : $t^2=(1+z)(1+\overline{z})=2+2\,Re(z)$ et donc $2\,Re(z)=t^2-2$

et donc $|1-z+z^2|^2=(1-z+z^2)(1-\overline{z}+\overline{z}^2)=1-\overline{z}+\overline{z}^2-z+z\overline{z}-z\overline{z}^2+z^2-z^2\overline{z}+z^2\overline{z}^2$

soit que $|1-z+z^2|^2=1-4\,Re(z)+4(Re(z))^2=(2\,Re(z)-1)^2$

et donc $\left|1-z+z^2\right|=\left|2\,Re(z)-1\right|=\left|t^2-3\right|$

Il suffit donc de déterminer les extrémums de la fonction $f : t \mapsto f(t)=t+\left|t^2-3\right|$ sur $[0;2]$

le tableau de variations de f sur $[0;2]$ est :

t	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

ainsi donc pour $t\in[0;2]$, on a : $\sqrt{3}\le f(t)\le\dfrac{13}{4}$

et par suite si $|z|=1$ alors $\sqrt{3}\le|1+z|+\left|1-z+z^2\right|\le\dfrac{13}{4}$

EXERCICE209 : Soient a et b deux nombres complexes. Si $\omega_0,\omega_1,\dots\dots\dots,\omega_{n-1}$ désignent les racines énièmes de 1 , montrer que : $|a|+|b|\le\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}|a+\omega_k b|$

I.S : on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}(a+\omega_k b)=\sum_{k=0}^{k=n-1}a+b\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega_k=na$ puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega_k=\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega_1^k=\frac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1}=0$

Donc d'une part $|na|=\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}(a+\omega_k b)\right|\le\sum_{k=0}^{k=n-1}|a+\omega_k b|$ soit que $|a|=\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}(a+\omega_k b)\right|\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}|a+\omega_k b|$

Et d'autre part $|b|\le\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}|b+\omega_k a|$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}|b+\omega_k a|=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left|a+\frac{b}{\omega_k}\right|$ puisque $|\omega_k|=1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left|a+\frac{b}{\omega_k}\right|=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left|a+be^{i\frac{2(n-k)\pi}{n}}\right|=\sum_{j=0}^{j=n-1}|a+b\omega_j|$

Car $\dfrac{1}{\omega_k}=\dfrac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}=\dfrac{e^{i\frac{2n\pi}{n}}}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}=e^{i\frac{2(n-k)\pi}{n}}$ et quand k varie de 0 à $n-1$ alors $n-k$ varie aussi mais de $n-1$ à 0

En conclusion on a : $|a|+|b|\le\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}|a+b\omega_k|$

EXERCICE210 : Soit un nombre complexe z tel que : $Re(z) \geq 0 \quad et \quad \left|z^2 - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$

Montrer que $\left|z - \frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3}$

I.S : on a $\left|z^2 - \frac{1}{2}\right|^2 \leq \frac{1}{4}$ soit que $\left(z^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \leq 0$ ou encore $|z|^4 - \mathrm{Re}\left(z^2\right) \leq 0$

Or $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = 2\mathrm{Re}(z)^2 - |z|^2$ donc $\mathrm{Re}(z)^2 \geq \frac{|z|^2\left(|z|^2+1\right)}{2}$

Maintenant , on a $\left|z - \frac{1}{3}\right|^2 - \frac{4}{9} < 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{3}\right)\left(\bar{z} - \frac{1}{3}\right) - \frac{4}{9} < 0 \Leftrightarrow |z|^2 - \frac{2}{3}Re(z) - \frac{1}{3} < 0$

Ou encore, $\mathrm{Re}(z) > \frac{3|z|^2 - 1}{2}$

Puisque $\mathrm{Re}(z) > 0$ alors soit que $3|z|^2 - 1 < 0$ ce qui est vrai, soit que $3|z|^2 - 1 \geq 0$ et donc on aura

$\mathrm{Re}(z)^2 \geq \left(\frac{3|z|^2-1}{2}\right)^2$

Or si $|z|^2 \geq \frac{1}{3}$ alors en posons $x = |z|^2$ on a $\frac{x(x+1)}{2} - \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 8x + 1 \leq 0$

De plus on a toujours $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ donc $\frac{|z|^2\left(|z|^2+1\right)}{2} \leq |z|^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|z|^2\left(|z|-1\right)\left(|z|+1\right) \leq 0$

Et donc $|z| \leq 1$ et puisque les racines du trinôme $7x^2 - 8x + 1$ sont $1 \; et \; \frac{1}{7}$ donc nécessairement $\frac{1}{7} \leq |z|^2 \leq 1$

donc pour $|z|^2 \geq \frac{1}{3} > \frac{1}{7}$ on a bien $\frac{|z|^2\left(|z|^2+1\right)}{2} \geq \left(\frac{3|z|^2-1}{2}\right)^2$ et donc $\mathrm{Re}(z) \geq \frac{3|z|-1}{2}$

Soit que $\left|z - \frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3}$

EXERCICE211 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X)$ un polynôme de degré n à coefficients complexes et tel que

$P(0) = 1 \; et \; P(1) = 0$. On note pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

Montrer que : $\sum_{k=0}^{k=n} P(\omega_k) = n+1$ et que $\sup_{|z|=1}|P(z)| \geq 1 + \frac{1}{n}$

I.S : posons $P(z) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k z^k$ avec $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$

On a alors $\sum_{k=0}^{k=n} P(\omega_k) = \sum_{k=0}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=n} a_p \omega_k^p = \sum_{p=0}^{p=n} a_p \omega_0^p + \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=n} a_p \omega_k^p = \sum_{p=0}^{p=n} a_p \omega_0^p + \sum_{k=1}^{k=n} a_p \sum_{p=0}^{p=n} \omega_k^p$

$$= \sum_{p=0}^{p=n} a_p \omega_0^p + \sum_{k=1}^{k=n} a_p \frac{e^{i2\pi k}-1}{e^{i\frac{2\pi}{n+1}}-1} = \sum_{p=0}^{p=n} a_p \omega_0^p = a_0 \sum_{p=0}^{p=n} 1 = (n+1)a_0 = n+1$$

Car $a_0 = P(0) = 1$

On a $\sum_{k=0}^{k=n} P(\omega_k) = n+1 = \sum_{k=1}^{k=n} P(\omega_k)$ car $P(1) = 0$ donc $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{k=n} P(\omega_k)\right| = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$

Et donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left|P(\omega_k)\right| \geq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{k=n} P(\omega_k)\right| = 1+\frac{1}{n}$ d'après l'inégalité triangulaire

Et puisque $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left|P(\omega_k)\right|$ est la valeur moyenne des $\left|P(\omega_k)\right|$ pour k variant dans $[\![1;n]\!]$

Alors il existe au moins $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $\left|P(\omega_k)\right| \geq 1+\frac{1}{n}$ et donc $\sup_{|z|=1}\left|P(z)\right| \geq 1+\frac{1}{n}$

EXERCICE212 : Soit $P_0P_1 \ldots\ldots P_{n-1}$ un polygone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 1

Montrer que : $P_0P_1 . P_0P_2 \ldots\ldots P_0P_{n-1} = n$

I.S : Remarquons que les P_i sont les images géométriques des nièmes racines de l'unité, avec P_0 est l'image de 1

Considérons le polynôme $P(z) = z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\ldots\ldots(z-\omega^{n-1})$ avec

$\omega = \omega_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

(On rappelle que $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \omega_1^k$ pour tout $k \in \{0,1,\ldots\ldots,\mathrm{n}-1\}$)

Et donc $n = P'(1) = (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots\ldots(1-\omega^{n-1})$ et en passant aux modules on obtient le résultat demandé.

EXERCICE213 : Soit $P_0P_1 \ldots\ldots P_{n-1}$ un polygone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 1

Montrer que : $sin\frac{\pi}{n} . sin\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

I.S : On a : $1-\omega^k = 1-\cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} = 2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right)$ donc $\left|1-\omega^k\right| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$ pour tout $k \in \{0,1,\ldots\ldots,\mathrm{n}-1\}$, en utilisant le résultat de l'exercice précedent, on obtient l'égalité

EXERCICE214 : Soit $P_0P_1 \ldots\ldots P_{n-1}$ un polygone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 1

Montrer que : $sin\frac{\pi}{2n} . sin\frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

I.S : Si $P_0P_1 \ldots\ldots P_{2n-1}$ est un polygone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 1

alors $P_0P_1 . P_0P_2 \ldots\ldots P_0P_{2n-1} = 2n$

or $P_0P_2\, P_4 \ldots\ldots P_{2n-2}$ est aussi un polygone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 1

donc $P_0P_2.P_0P_4.....P_0P_{2n-2} = n$

en combinant les deux égalités, on obtient l'égalité : $P_0P_1.P_0P_3.....P_0P_{2n-1} = 2$

puisque pour tout $k \in \{0,1,.......,n-1\}$, on a : $P_0P_{2k-1} = 2\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ alors on déduit l'égalité

EXERCICE215 : Calculer pour $t = \dfrac{\pi}{6}$ les deux sommes suivantes :(page 303)

$$S_1 = 1 + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{cos(kt)}{cos^k(t)} \quad et \quad S_2 = \sum_{k=1}^{k=n} cos(kt) \cdot cos^k(t)$$

I.S : Considérons le nombre complexe $z = \dfrac{1}{\cos t}(\cos t + i\sin t)$

A partir de l'identité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ on déduit

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\cos^k t}(\cos kt + i\sin kt) = \frac{1-\dfrac{1}{\cos^n t}(\cos nt + i\sin nt)}{1-\dfrac{1}{\cos t}(\cos t + i\sin t)} = \frac{\sin nt}{\sin t\cos^{n-1} t} + i\frac{\cos^n t - \cos nt}{\sin t\cos^{n-1} t}$$

Et donc $S_1 = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos kt}{\cos^k t} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos kt}{\cos^k t} = \frac{\sin nt}{\sin t\cos^{n-1} t}$

De même de l'identité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z - z^{n+1}}{1-z}$ avec cette fois $z = \cos t(\cos t + i\sin t)$ on déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^k t(\cos kt + i\sin kt) = \frac{\sin nt\cos^{n+1} t}{\sin t} + i\left(\frac{\cos nt}{\sin nt} - \frac{\cos^{n+1} t\cos nt}{\sin t}\right)$$

Et donc $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^k t\cos kt = \frac{\sin nt\cos^{n+1} t}{\sin t}$

EXERCICE216 : Montrer que $1 + cos^{2n}\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + cos^{2n}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + ... + cos^{2n}\left(\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right) = \dfrac{n}{4^n}\left(2 + C_{2n}^n\right)$

pour tout entier $n \geq 2$

I.S : posons $z = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ et considérons la somme $S_n = 4^n + (1+z)^{2n} + (1+z^2)^{2n} + ... + (1+z^{n-1})^{2n}$

Pour tout $k \in \{1,2,......,n-1\}$ on a $1 + z^k = 2\cos\dfrac{k\pi}{n}\left(\cos\dfrac{k\pi}{n} + i\sin\dfrac{k\pi}{n}\right)$

Et $(1+z^k)^{2n} = 2^{2n}\cos^{2n}\dfrac{k\pi}{n}(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) = 4^n\cos^{2n}\dfrac{k\pi}{n}$

Donc $S_n = 4^n\left[1 + \cos^{2n}\dfrac{\pi}{n} + \cos^{2n}\dfrac{2\pi}{n} + ... + \cos^{2n}\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right]$

D'autre part en utilisant la formule du binôme de NEWTON on obtient

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+z^k\right)^{2n}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(C_{2n}^0+C_{2n}^1z^k+C_{2n}^2z^{2k}+.........+C_{2n}^{2n-1}z^{(2n-1)k}+C_{2n}^{2n}\right)$$

$$=nC_{2n}^0+nC_{2n}^n+nC_{2n}^{2n}+\sum_{j=1,\,j\neq n}^{2n-1}C_{2n}^j\cdot\sum_{k=0}^{n-1}z^{jk}=2n+nC_{2n}^n+\sum_{j=1,\,j\neq n}^{2n-1}C_{2n}^j\cdot\frac{1-z^{jn}}{1-z^j}=2n+nC_{2n}^n$$

EXERCICE217 : Soit $z_1,z_2,.....,z_n$ les affixes des sommets d'un polygone régulier dont le cercle circonscrit est centré à l'origine du repère du plan complexe.

Montrer qu'il existe $k,l,m\in\{1,2,.....,n\}$ tels que $z_i+z_j=z_k$ si et seulement si $n\equiv 0\ \ [6]$

I.S : posons $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$; alors $z_p=z_1\varepsilon^{p-1}$ pour tout $p\in\{1,2,.......,n\}$

On a $z_l+z_m=z_k\ \Leftrightarrow\ 1+\varepsilon^{m-l}=\varepsilon^{k-l}$ donc $2\cos\left(\dfrac{(m-l)\pi}{n}\right)e^{i\frac{(m-l)\pi}{n}}=e^{i\frac{2(k-l)\pi}{n}}$ ce qui est équivalent à

$\dfrac{(m-l)\pi}{n}=\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2(k-l)\pi}{n}$ (puisque on a nécessairement $2\cos\dfrac{(m-l)\pi}{n}=1\ \ etque\ \ 0<\dfrac{(m-l)\pi}{n}<\pi$

Et donc on a : $n=6(k-l)=3(m-l)$ et donc $6\ divise\ n$

EXERCICE218 : Soient un entier $n\geq 1$

Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\,cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\,cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)=0$

I.S : On montre d'abord que pour $z\in\mathbb{C}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(z+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=n\left(z^n+1\right)$

En effet, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(z+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(z+\omega^k\right)^n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\sum_{j=0}^{j=n}C_n^j\cdot\omega^{kj}z^{n-j}$ avec $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$

$$=\sum_{j=0}^{j=n}\left(\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega^{jk}\right)\cdot C_n^j\cdot z^{n-j}$$

Or pour $j\neq 0\ \ et\ \ \ j\neq n$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega^{jk}=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\omega^j\right)^k=\frac{1-\left(\omega^j\right)^n}{1-\omega^j}=\frac{1-\left(\omega^n\right)^j}{1-\omega^j}=0$ puisque $\omega^n=1$

Et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(z+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=\sum_{j=0}^{j=n}\left(\sum_{k=0}^{k=n-1}\omega^{jk}\right)\cdot C_n^j\cdot z^{n-j}=\left(\sum_{k=0}^{k=n-1}1\right)C_n^0\cdot z^n+\left(\sum_{k=0}^{k=n-1}1\right)C_n^n\cdot z^0=n\left(z^n+1\right)$

Ainsi pour $z=1$ on aura $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=2n$

Or $\left(1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=\left(2\cos\dfrac{k\pi}{n}\cdot e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)^n=2^n\cos^n\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)e^{ik\pi}=(-1)^k\,2^n\cos^n\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

Et ainsi donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\,cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$

Considérons cette fois $z=e^{i\frac{\pi}{n}}$ une racine n-iemme de (-1)

On a $z+e^{i\frac{2k\pi}{n}}=e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2k\pi}{n}}=2\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}$

Donc $\left(z+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=2^n\cos^n\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)e^{ik\pi}e^{i\frac{\pi}{2}}=i(-1)^k 2^n\cos^n\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$

Ainsi donc $i2^n\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(z+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=n(-1+1)=0$

EXERCICE219: Soit $a\,,b\;et\;c$ trois nombres complexes tels que :

$|a|=|b|=|c|=1$, $a+b+c\neq 0$ et $a^2+b^2+c^2=0$

Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, on a : $\left|a^n+b^n+c^n\right|\in\{0;1;2;3\}$

I.S : Posons $s=a+b+c$, $s'=ab+bc+ca$ et $p=abc$ puis considérons l'équation d'inconnue z suivante : $z^3-sz^2+s'z-p=0$ dont les solutions d'après les formules de VIETTE sont $a\,,b\;et\;c$

Puisque $a^2+b^2+c^2=0$ on a : $s^2=2s'$

De plus $s'=p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=p\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)=p\cdot\overline{s}$ et donc on déduit que $s^2=2p\cdot\overline{s}$

Et par suite $|s|^2=2|p|\cdot\left|\overline{s}\right|=2|s|$ et puisque $s\neq 0$ alors $|s|=2$ et donc $s=2\lambda$ avec $|\lambda|=1$

On déduit aussi que $s'=\frac{1}{2}s^2=2\lambda^2$ et $p=\frac{s'}{\overline{s}}=\frac{2\lambda^2}{2\overline{\lambda}}=\lambda^3$ et donc l'équation de racines $a\,,b\;et\;c$ devient $z^3-2\lambda z^2+2\lambda^2z-\lambda^3=0$ qui est équivalente à $(z-\lambda)\left(z^2-\lambda z+\lambda^2\right)=0$ dont les racines sont :

$\lambda,\lambda\omega\;et\;-\lambda\omega^2$ avec $\omega=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\omega=-\overline{j}$)

Faisant le choix suivant : $a=\lambda$, $b=\lambda\omega$ et $c=-\lambda\omega^2$

Puisque : $\omega^2-\omega+1=0$ et que $\omega^3=-1$ alors

$S_n=\left|a^n+b^n+c^n\right|=\left|\lambda^n+\lambda^n\omega^n+(-1)^n\lambda^n\omega^{2n}\right|=\left|1+\omega^n+(-1)^n\omega^{2n}\right|$ et donc $S_{k+6}=S_k$

Par suite pour tout entier $n\geq 2$, on a : les valeurs possibles de S_n sont :

$S_0=3$, $S_1=2$, $S_2=0$, $S_3=1$, $S_4=0$, $S_5=2$ et donc $\left|a^n+b^n+c^n\right|\in\{0;1;2;3\}$

EXERCICE220 : Soit $a\,,b$ deux nombres complexes non nuls. Montrer que l'équation $az^3+bz^2+\overline{b}z+\overline{a}=0$ admet au moins une racine de module égal à 1

I.S : Remarquons d'abord que si z est une racine de cette équation alors $\frac{1}{\overline{z}}$ est aussi une racine de cette équation puisque : $a\cdot\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)^3+b\cdot\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)^2+\overline{b}\cdot\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)+\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\left(\overline{z}\right)^3+\overline{b}\cdot\left(\overline{z}\right)^2+b\cdot\left(\overline{z}\right)+a}{\left(\overline{z}\right)^3}$

$$=\frac{\left(\overline{a\cdot(z)^{3}+b\cdot(z)^{2}+\overline{b}\cdot(z)+\overline{a}}\right)}{\left(\overline{z}\right)^{3}}$$

Ainsi donc si z_1, z_2, z_3 sont les trois racines de cette équation alors $\frac{1}{\overline{z_1}}, \frac{1}{\overline{z_2}}, \frac{1}{\overline{z_3}}$ sont les mêmes racines mais pas nécessairement dans le même ordre.

Si pour un certain $k \in \{1,2,3\}$ on a $z_k = \frac{1}{\overline{z_k}}$ alors $|z_k| = 1$ ce qui répond à notre question .

Si non supposons par exemple que : $z_1 = \frac{1}{\overline{z_2}}$, $z_2 = \frac{1}{\overline{z_3}}$ *et* $z_3 = \frac{1}{\overline{z_1}}$

On a donc d'après les deux premières égalités : $z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_3} = 1$ donc $|z_1| \cdot |z_2|^2 \cdot |z_3| = 1$

Or d'après les formules de VIETTE, on a : $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\frac{\overline{a}}{a}$ donc $|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| = 1$ et par suite $|z_2| = 1$

Et ainsi de suite pour tous les autre cas de figure.

EXERCICE221 : Soit $n \geq 3$ un entier et soit a un nombre réel non nul.

Montrer que si z est une racine non réelle de l'équation $x^n + ax + 1 = 0$ alors $|z| \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$

I.S : posons $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ une solution non réelle de cette équation avec $\alpha \in [0; 2\pi[\setminus \{\pi\}$

L'équation devient alors : $r^n \cos n\alpha + ra\cos\alpha + 1 + i\left(r^n \sin n\alpha + ra\sin\alpha\right) = 0$

Soit que $r^n \cos n\alpha + ra\cos\alpha + 1 = 0$ *et* $r^n \sin n\alpha + ra\sin\alpha = 0$

Donc $\left(r^n \cos n\alpha + ra\cos\alpha + 1\right)\sin\alpha = 0$ *et* $\left(r^n \sin n\alpha + ra\sin\alpha\right)\cos\alpha = 0$

On en déduit que : $r^n \sin(n-1)\alpha = \sin\alpha$ soit que $r^n |\sin(n-1)\alpha| = |\sin\alpha|$

Or pour tout entier naturel non nul k , on a : $|\sin k\alpha| \leq k|\sin\alpha|$ donc $|\sin\alpha| \leq r^n (n-1)|\sin\alpha|$

Puisque $\sin\alpha \neq 0$ alors $r^n \geq \frac{1}{n-1}$ soit que $|z| \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$

EXERCICE222: Soit $a \; et \; b$ deux nombres complexes donnés.

Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que : $|z_0| = 1$ et $|az_0^2 + bz_0 + i| \geq 1 + |a|$

I.S : Posons $P(z) = az^2 + bz + i$ et donc $P(z) + P(-z) = 2\left(az^2 + i\right)$

Il suffit donc de choisir z_0 tel que : $az_0^2 = |a|i$

Ainsi donc $|z_0| = 1$ et si on pose $a = |a|e^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi[$ alors $az_0^2 = |a|i$ est équivalente à $z_0^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}$ soit que $z_0 = e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}$

Et ainsi on aura : $P(z_0) + P(-z_0) = 2\left(az_0^2 + i\right) = 2\left(|z_0|i + i\right) = 2i\left(1 + |a|\right)$ et en passant aux modules on trouve que : $|P(z_0)| + |P(-z_0)| \geq |P(z_0) + P(z_0)| = 2\left(1 + |a|\right)$ soit que $|P(z_0)| \geq 1 + |a|$ ou $|P(-z_0)| \geq 1 + |a|$

EXERCICE223 : Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels qui vérifient

$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad ; \quad P(z).P(2z^2) = P(2z^3 + z)$

Montrer que toutes les racines de $P(z)$ sont de module inférieur ou égal à 1

I.S : Soit z une racine de $P(z)$ avec $|z| > 1$ d'après la relation ci-dessus $2z^2 + z$ est aussi une racine de $P(z)$ de plus $|2z^2 + z| = |z||2z+1| \geq |z|(2|z|-1) > |z|$

Ainsi donc si $P(z)$ admet une racine z_1 avec $|z_1| > 1$ alors il admet une racine $z_2 = 2z_1^2 + z_1$ avec $|z_2| > 1$

En continuant ce procédé on conclut que $P(z)$ admet une infinité de racines ce qui est absurde.

Ainsi donc toutes les racines de $P(z)$ sont nécessairement de module inférieur ou égal à 1

EXOS224 : Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(z^2+1\right)^n = (z-i)^{2n}$

I.S : remarquons que $z = i$ est une solution de cette équation.

Ainsi $\left(z^2+1\right)^n = (z-i)^{2n} \Leftrightarrow (z-i)^n (z+i)^n = (z-i)^{2n} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ (z+i)^n = (z-i)^n \ si \ z \neq i \end{cases}$

Puisque si $z \neq i$ on a : $(z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\} \ ; \ \dfrac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\} \ ; \ z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{1,\dots,n-1\} \ ; \ z = -i\left(\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}\right) \quad (k \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{1,\dots,n-1\} \ ; \ z = -i\left(\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}\right) = \cot an\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Les solutions de l'équation sont : $i \ et \ les \ réels \ \cot an\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \ avec \ k \in \{1,2,\dots,n-1\}$

EXERCICE225: On considère un entier $p \geq 1$ et l'équation en z suivante :

$(E_p) \quad : \quad pz^p = z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + z + 1$ et $z \neq 1$

Montrer que l'équation (E_p) ne peut admettre de solution de module supérieur ou égal à 1

I.S : Soit $z \neq 1$ une solution de l'équation (E_p) de module r

Supposons que : $r > 1$

On a $p|z|^p = \left|z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + z + 1\right| \leq |z|^{p-1} + |z|^{p-2} + \dots + |z| + 1$

Soit que $pr^p \leq \frac{r^p - 1}{r-1}$ car $r \neq 1$, on en déduit que $pr^p\left(r-1\right) \leq r^p - 1$

Posons $f\left(x\right) = px^p\left(x-1\right) = px^{p+1} - \left(p+1\right)x^p + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'\left(x\right) = p\left(p+1\right)x^{p-1}\left(x-1\right) > 0$ sur $]1;+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et puisque $f\left(1\right) = 0$ alors $\left(\forall x \in]1;+\infty[\right)$; $f\left(x\right) > 0$ en particulier $f\left(r\right) > 0$ et ce qui est absurde et ainsi on ne peut avoir $r > 1$ et donc nécessairement $r \leq 1$

Supposons que $|z| = 1$ et posons $z = e^{i\theta}$

Ainsi $pz^p = pe^{ip\theta} = \frac{1-e^{ip\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{-2i\sin\left(\frac{ip\theta}{2}\right)e^{i\frac{ip\theta}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{i\theta}{2}\right)e^{i\frac{i\theta}{2}}}$ ce qui donne $\frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}$

Et donc $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} \in \mathbb{R}$ soit que $\frac{p+1}{2}\theta \equiv 0 \quad [\pi]$ ou encore que $\left(\exists k \in \mathbb{Z}\right)$; $\frac{p+1}{2}\theta = k\pi$

Ce que donne $\left(\exists k \in \mathbb{Z}\right)$; $p = \frac{2k\pi - \theta}{\theta}$ puisque $\theta \neq 0$

On obtient alors $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} = \left(-1\right)^k = \frac{\sin\left(-\frac{1}{2}\theta + k\pi\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{\left(-1\right)^k}{p}$ soit que $p = -1$

ce qui est absurde et donc $|z| < 1$

EXERCICE226 : Soit $m \in \mathbb{C}$ et $a \ et \ b$ les racines de l'équation : $z^2 + 2mz + 1 = 0$
Montrer que : $|a| + |b| = |m+1| + |m-1|$

I.S : on a $\left(|m+1| + |m-1|\right)^2 = |m+1|^2 + |m+1|^2 + 2|m^2 - 1| = 2|m|^2 + 2 + 2|m^2 - 1|$

Or $z^2 + 2mz + 1 = \left(z+m\right)^2 + 1 - m^2$ donc $\left(a+m\right)^2 = m^2 - 1$ ce qui donne $|a+m|^2 = |m^2 - 1|$

Soit que $|a|^2 + |m|^2 + a \cdot \overline{m} + \overline{a} \cdot m = |m^2 - 1|$ et de même on a $|b|^2 + |m|^2 + b \cdot \overline{m} + \overline{b} \cdot m = |m^2 - 1|$

Ainsi donc $|a|^2 + |b|^2 + 2|m|^2 + \left(a+b\right) \cdot \overline{m} + \overline{\left(a+b\right)} \cdot m = 2|m^2 - 1|$

Or $a + b = -2m$ donc $\left(a+b\right) \cdot \overline{m} + \overline{\left(a+b\right)} \cdot m = -4|m|^2$ et par suite $2|m^2 - 1| = |a|^2 + |b|^2 - 2|m|^2$

On en déduit que $\left(|m+1| + |m-1|\right)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = \left(|a| + |b|\right)^2$ puisque $ab = 1$

Et donc $|a| + |b| = |m+1| + |m-1|$ puisque ce sont des réels positifs.

EXERCICE227 : Soient a un réel et u et v deux nombres complexes de module 1 .

Montrer que $\left(au+(1-a)v\right)\cdot\left(av+(1-a)u\right)-\frac{1}{4}(u+v)^2=-\left(\frac{1}{2}-a\right)^2(u-v)^2$

I.S : on suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

Soit $U,V\ et\ M$ les points d'affixes respectivement $u,v\ et\ \frac{u+v}{2}$

Le triangle UOV étant isocèle de sommet O donc $(OM)\perp(UV)$

Le point P d'affixe $z=au+(1-a)v=\frac{a}{a+(1-a)}u+\frac{1-a}{a+(1-a)}v$ est un point du segment $[UV]$

Puisque $OP=\left|au+(1-a)v\right|\quad et\quad OM=\left|\frac{u+v}{2}\right|$ d'après le théorème de Pythagore, $OP^2=OM^2+MP^2$

Donc $\left|au+(1-a)v\right|\geq\frac{1}{2}|u+v|$ de plus $OP^2-OM^2=MP^2$

Or $MP^2=\left|au+(1-a)v-\frac{u+v}{2}\right|^2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2|u-v|^2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2(u-v)\left(\overline{u}-\overline{v}\right)=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2(u-v)\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)$

Puisque $\overline{u}=\frac{1}{u}\quad et\quad \overline{v}=\frac{1}{v}$

Enfin on a : $OP^2-OM^2=\left|au+(1-a)v\right|^2-\frac{1}{4}|u+v|^2=\left(au+(1-a)v\right)\left(a\frac{1}{u}+(1-a)\frac{1}{v}\right)$

Ce qui donne $OP^2-OM^2=\frac{1}{uv}\left(au+(1-a)v\right)\left(av+(1-a)u\right)-\frac{1}{4uv}(u+v)^2$ ce qu'il fallait démontrer.

EXERCICE228 : Soit $z_1,z_2,z_3,z_4,et\ z_5$ cinq nombres complexes de même module et tels que :

$\sum_{k=1}^{k=5}z_k=\sum_{k=1}^{k=5}z_k^2=0$. Montrer que ces nombres sont les affixes des sommets d'un pentagone régulier.

I.S : considérons le polynôme $P(X)=\prod_{k=1}^{k=5}(x-z_k)=X^5+aX^4+bx^3+cX^2+dX+e$

On a $a=-\sum z_k=0$ et $b=\sum z_iz_j=\frac{1}{2}\left(\sum z_k\right)^2-\frac{1}{2}\sum z_k^2=0$

Si r est le module commun aux z_k alors $0=\sum\overline{z_k}=\sum\frac{r^2}{z_k}=\frac{r^2}{\prod z_k}\sum z_iz_{i+1}z_{i+2}z_{i+3}$ ce qui donne $d=0$

De même $0=\sum\overline{z_kz_{k'}}=\sum\frac{r^4}{z_kz_{k'}}=\frac{r^4}{\prod z_k}\sum z_iz_{i+1}z_{i+2}$ et donc $c=0$

Ainsi donc $P(X)=x^5+e$ soit que les z_k sont les racines cinquièmes d'un même nombre complexe qui est $(-e)$ et donc ils sont les affixes des sommets d'un pentagone régulier.

EXERCICE229 : (Théorème de PAPPUS) Soit $A\,,B\,,C\;et\;D$ quatre points cocycliques et M un point du cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$. Montrer que le produit des distances du point M à deux côtés opposés quelconques et le produit des distances de M aux deux diagonales de $ABCD$
sont égaux.

I.S : considérons le plan complexe d'origine le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$ qu'on considère de rayon 1 et soit $a,b,\mathrm{c}\;et\;d$ les affixes des points $A,B,C\;et\;D$ respectivement.

L'équation de la droite (AB) est donnée par la formule : $\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$

Soit que : $z\left(\overline{a}-\overline{b}\right)-\overline{z}(a-b)=\overline{a}b-a\overline{b}$ ou encore $z+ab\overline{z}=a+b$

Soit $M_1(m_1)$ la projection orthogonale du point $M(m)$ sur la droite (AB), alors $m_1=\dfrac{m-ab\overline{m}+a+b}{2}$

Et donc $d(M,(AB))=|m-m_1|=\left|\dfrac{(m-a)(m-b)}{2m}\right|$ puisque $m\overline{m}=1$

De même on a : $d(M,BC)=\left|\dfrac{(m-b)(m-c)}{2m}\right|$, $d(M,CD)=\left|\dfrac{(m-c)(m-d)}{2m}\right|$,

$d(M,\mathrm{DA})=\left|\dfrac{(m-d)(m-a)}{2m}\right|$, $d(M,\mathrm{AC})=\left|\dfrac{(m-a)(m-c)}{2m}\right|$ et $d(M,BD)=\left|\dfrac{(m-b)(m-d)}{2m}\right|$

On a bien : $d(M,AB).d(M,CD)=d(M,\mathrm{BC}).d(M,\mathrm{DA})=d(M,AC).d(M,\mathrm{B}D)$

EXERCICE230 : Soit G le centre d'un quadrilatère $ABCD$
Montrer que si $(GA)\perp(GD)$ alors la distance AD est égale à la longueur du segment joignant les milieux des segments $[AD]\;et\;[BC]$.

I.S : pour $z\;et\;z'$ deux nombres complexes, on pose $z\cdot z'=\mathrm{Re}\left(\overline{z}z'-z\overline{z'}\right)$ dit le produit réel de $z\;et\;z'$

Soient a,b,c,d,g les affixes, dans le plan complexe des points A,B,C,D,G respectivement.

On a $(GA)\perp(GD)$ si et seulement si $(a-g)\cdot(d-g)=0$ (le produit réel de deux complexes)

Donc de $(GA)\perp(GD)$ on déduit que $\left(a-\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)\cdot\left(d-\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)=0$

Donc $(3a-b-c-d)\cdot(3d-a-b-c)=0$

ou encore que $(a-b-c+d+2(a-d))\cdot(a-b-c+d-2(a-d))=0$

soit que $(a+d-b-c)\cdot(a+d-b-c)=4(a-d)\cdot(a-d)$ donc $\left|\dfrac{a+d}{2}-\dfrac{b+c}{2}\right|^2=|a-d|^2$

si on pose $m\;et\;n$ sont les affixes des points $M\;et\;N$ milieux respectifs des segments $[AD]\;et\;[BC]$ alors

$m=\dfrac{a+d}{2}\;\;et\;\;n=\dfrac{b+c}{2}$ et donc $MN=AD$

EXERCICE231 : Soit ABC un triangle rectangle en C. Soient P le pied de la hauteur issue de C, M le milieu de $[CP]$ et N le milieu de $[BP]$. Montrer que $(AM)\perp(CN)$

I.S : on suppose que le plan complexe est d'Origine le point C et soit a,b,c,m,n et p les affixes des points A,B,C,M,N et P respectivement.

Ainsi donc $a\in\mathbb{R}$ et $b\in i\mathbb{R}$

Montrons d'abord que $\frac{1}{p}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

En effet on a $(CP)\perp(AB)$ et $P\in(AB)$ donc $(CP)\perp(AB)$ et P,A,B sont alignés

Donc $\frac{p}{b-a}\in i\mathbb{R}^*$ et $\frac{p-a}{b-a}\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{p}{b-a}\right)}=-\frac{p}{b-a}$ et $\overline{\left(\frac{p-a}{b-a}\right)}=\frac{p-a}{b-a}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{p}}{-b-a}=-\frac{p}{b-a} \text{ et } \frac{\overline{p}-a}{-b-a}=\frac{p-a}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{p}}{-b-a}=-\frac{p}{b-a} \text{ et } \frac{\overline{p}}{-b-a}-\frac{a}{-b-a}=\frac{p}{b-a}-\frac{a}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{p}}{b+a}=\frac{p}{b-a} \text{ et } \frac{a}{b-a}+\frac{a}{b+a}=\frac{p}{b-a}+\frac{\overline{p}}{b+a}$$

soit que $\frac{a(b+a)+a(b-a)}{(b-a)(b+a)}=\frac{p}{b-a}+\frac{p}{b-a}=\frac{2p}{b-a}$ et donc $\frac{ab}{a+b}=p$ ou encore $\frac{1}{p}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

On en déduit que $m=\frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}$ et $n=\frac{b}{2}\frac{2a+b}{a+b}$

Et donc $\frac{m-a}{n}=-\frac{a}{b}=-\frac{a\overline{b}}{|b|^2}\in i\mathbb{R}$ et donc $(AM)\perp(CN)$

EXERCICE232 : On considère l'équation $z^2+(1-i)z+\alpha=0$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$

Déterminer α pour que les points dont les affixes sont les racines de cette équation forment avec le point P d'affixe $\left(\frac{i}{2}\right)$ un triangle rectangle en P.

I.S : le discriminant de cette équation est $\Delta=-4\alpha-2i$ et soit δ une racine carrée de Δ

Les solutions de cette équation sont : $z_1=\frac{-1+i+\delta}{2}$ et $z_2=\frac{-1+i-\delta}{2}$

les points M_1 et M_2 dont les affixes sont z_1 et z_2 forment avec le point $P\left(\frac{i}{2}\right)$ un triangle rectangle en P

si et seulement si $z_2=\frac{i}{2}$ ou $\frac{z_1-\frac{i}{2}}{z_2-\frac{i}{2}}\in i\mathbb{R}$

si $z_2=\frac{i}{2}\Rightarrow\frac{-1-\delta}{2}=0\Rightarrow\Delta=\delta^2=1\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i$ et dans ce cas $z_1=-1+\frac{1}{2}i$

si $\dfrac{z_1-\frac{i}{2}}{z_2-\frac{i}{2}} \in i\mathbb{R}$ alors $\dfrac{-1+\delta}{-1-\delta}=-\dfrac{-1+\overline{\delta}}{-1-\overline{\delta}}$ et donc $2\left(1-|\delta|^2\right)=0$ ce qui donne $|\Delta|=1$ *et donc* $\left|\alpha+\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{4}$

le point $A(\alpha)$ décrit donc le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{1}{4}$

EXERCICE233 : Soit ABC un triangle et (C) le cercle circonscrit à ce triangle.
Soit P (resp. S) le point d'intersection du cercle (C) et de la parallèle à (BC) (resp la perpendiculaire à (BC) . Soit A' le point d'intersection du cercle (C) et de la perpendiculaire à (AC) passant par S Soit R le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par C et du cercle (C)
Montrer que la droite (PR) est parallèle à la tangente en B au cercle (C) .

I.S : on suppose que le cercle (C) est unitaire et que le plan complexe est d'origine le centre de ce cercle.
Soit a,b,c,p,s *et* r les affixes des points A,B,C,P,S *et* R respectivement.

Puisque l'angle $\widehat{SAP}$ est droit, les points P *et* S sont diamétralement opposés. Il suffit donc de calculer p car $s=-p$

On a $(AP)\parallel(BC) \Leftrightarrow \dfrac{p-a}{b-c}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\overline{\dfrac{p-a}{b-c}}\right)=\dfrac{p-a}{b-c} \Leftrightarrow \dfrac{p-a}{b-c}=\dfrac{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}=\dfrac{bc(p-a)}{pa(b-c)}$

(puisque : $|z|=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1}{z}$) d'où $p=\dfrac{bc}{a}$ *et donc* $s=-\dfrac{bc}{a}$

Et par le même raisonnement, dans le triangle CAB on a $r=\dfrac{ab}{c}$

or $\dfrac{r-p}{b-0}=\dfrac{\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}}{b}=\dfrac{a^2-c^2}{ac}=-\dfrac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}{ac}=-\left(\overline{\dfrac{r-p}{b}}\right)$

Et par suite $\dfrac{r-p}{b-0}\in i\mathbb{R}$ ainsi donc la droite (PR) est perpendiculaire à (OB) et donc elle est parallèle à la tangente en B au cercle (C) .

EXERCICE234 : Soit $z\in\mathbb{C}$. On note A,B *et* C les points d'affixes z, z^2 *et* z^3 respectivement.
Déterminer z pour que le point O d'affixe 0 soit le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC

I.S :On montrer d'abord que si M, N *et* P sont trois points deux à deux distincts, alors $\dfrac{\overrightarrow{MN}}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}+\dfrac{\overrightarrow{MP}}{\left\|\overrightarrow{MP}\right\|}$ est

un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$
En effet : si $z\in\mathbb{R}$ alors les points M, N *et* P sont alignés.

Si O est le centre du cercle inscrit dans triangle MNP alors $\left(\overrightarrow{OM},\vec{u}\right)=0$ où $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{MN}}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}+\dfrac{\overrightarrow{MP}}{\left\|\overrightarrow{MP}\right\|}$

Le vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $u=\dfrac{z^2-z}{\left|z^2-z\right|}+\dfrac{z^3-z}{\left|z^3-z\right|}$ donc

$$\frac{u}{z-0}=\frac{u}{z}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{(z-1)}{|z||z-1||z+1|}\left(1+\frac{(z+1)}{|z+1|}\right)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(z-1)\left(1+\frac{(z+1)}{|z+1|}\right)\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z+\frac{z^2}{|z+1|}=\bar{z}+\frac{\bar{z}^2}{|z+1|}\Leftrightarrow\left(z-\bar{z}\right)\left(|z+1|+z+\bar{z}\right)=0\Leftrightarrow|z+1|+2\operatorname{Re}(z)=0\quad(z\notin\mathbb{R})$$

De même on a $\left(\overrightarrow{ON},\vec{v}\right)=0$ où $\vec{v}=\dfrac{\overrightarrow{NM}}{\left\|\overrightarrow{NM}\right\|}+\dfrac{\overrightarrow{NP}}{\left\|\overrightarrow{NP}\right\|}$

Le vecteur $\vec{v}$ a pour affixe $v=\dfrac{z-z^2}{\left|z-z^2\right|}+\dfrac{z^3-z^2}{\left|z^3-z^2\right|}$

Donc $\dfrac{v}{z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(z-\bar{z}\right)\left(1-\dfrac{1}{|z|}\right)=0\Leftrightarrow|z|=1$

Puisque $|z+1|+2\operatorname{Re}(z)=\sqrt{z\bar{z}+2\operatorname{Re}(z)+1}+2\operatorname{Re}(z)$ alors

$$|z+1|+2\operatorname{Re}(z)=0\Leftrightarrow\sqrt{z\bar{z}+2\operatorname{Re}(z)+1}+2\operatorname{Re}(z)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{Re}(z)+1}+2\operatorname{Re}(z)=0$$

Ce qui donne $\operatorname{Re}(z)=-\dfrac{1}{2}$ et donc les seules solutions possibles sont : j et j^2

EXERCICE235 : Soit ABC un triangle et (C) le cercle circonscrit à ABC .
Soients D un point de (C), on note K,L,M et N les milieux de $[AB],[BC],[CD]$ et $[DA]$.
Montrer que les orthocentres des triangles AKN,BKL,CLM et DMN sont les sommets d'un parallélogramme.

I.S : les points $K(k)$ et $L(l)$ sont les images de $A(a)$ et $C(c)$ par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{2}$

Si $Q(q)$ est l'orthocentre de BKL alors $\overrightarrow{BQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BH}$ d'où $q-b=\dfrac{1}{2}(h-b)=\dfrac{1}{2}(a+c)$

ce qui donne $q=b+\dfrac{a+c}{2}$

de la même manière si P,R,S désignent les orthocentres des triangles AKN,CLM,DMN respectivement alors $p=a+\dfrac{b+d}{2}$, $r=c+\dfrac{b+d}{2}$, $s=d+\dfrac{a+c}{2}$

l'affixe de $\overrightarrow{PQ}$ est $q-p=\dfrac{b-a}{2}+\dfrac{c-d}{2}$ donc $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)$

de la même manière on obtient $\overrightarrow{SR}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)$

Si $G(g)$ est l'isobarycentre de $ABCD$ alors $g=\dfrac{a+b+c+d}{4}$ et si $H(h)$ est l'isobarycentre de $PQRS$ alors $h=\dfrac{p+q+r+s}{4}=\dfrac{a+b+c+d}{2}$, ainsi donc G est le milieu de $[OH]$ c.q.f.d

EXERCICE236: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : (E_α) ; $z^2-2iz+\alpha=0$ où $\alpha\in\mathbb{C}$

2- On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α).

Soient Ω , M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α , z_1 et z_2

1- On suppose que $\alpha=m^2-2m$ avec $m\in\mathbb{R}$

Montrer que les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

2-On suppose que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O

I.S : le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta_\alpha=-4(1+\alpha)$

Si $\alpha=m^2-2m$ avec $m\in\mathbb{R}$ alors $\Delta_\alpha=-4(1+m^2-2m)=-4i(m-1)^2=[2i(m-1)]^2$

Et dans ce cas $z_1=\dfrac{2i+2i(m-1)}{2}=im\in i\mathbb{R}$ et $z_2=\dfrac{2i-2i(m-1)}{2}=i(2-m)\in i\mathbb{R}$

Et donc les points O,M_1,M_2 sont alignés(appartiennent tous à l'axe des imaginaires).

2- $\Omega\in\Gamma \Leftrightarrow OM_1M_2$ $rec\tan gle\ en\ O \Leftrightarrow \dfrac{z_2}{z_1}\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{2i+\delta_\alpha}{2i-\delta_\alpha}=\dfrac{-2i+\overline{\delta_\alpha}}{2i+\overline{\delta_\alpha}}$

Ainsi donc $\Omega\in\Gamma \Leftrightarrow (2i+\delta_\alpha)(2i+\overline{\delta_\alpha})=(-2i+\overline{\delta_\alpha})(2i-\delta_\alpha) \Leftrightarrow -4+\delta_\alpha\overline{\delta_\alpha}=0 \Leftrightarrow |\delta_\alpha|^2=2$

Soit que $|\Delta_\alpha|=2$ ou encore $|1+\alpha|=\dfrac{1}{2}$ avec α ne s'écrit pas sous la forme $\alpha=m^2-2m$ et $m\in\mathbb{R}$

En écrivant $\alpha=m^2-2m$ alors $1+\alpha=(m-1)^2$

et $|1+\alpha|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |m-1|^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ou $m=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

soit que Γ est le cercle de centre le point $A(-1)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$

EXERCICE237 : Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier. Les diagonales $[AC]$ et $[CE]$ sont divisées intérieurement par deux points M et N tels que : $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}=r$

Déterminer r pour que les points B , M et N soient colinéaires.

I.S : considérons le plan complexe d'origine le centre de l'hexagone de telle sorte que $1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5$

où $\omega=e^{i\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, soit les affixes des points B,C,D,D,E,F,A respectivement.

Puisque $\frac{MC}{MA}=\frac{NE}{NC}=\frac{1-r}{r}$ alors les affixes des points $M\ et\ N$ sont $m=\omega r+\omega^5(1-r)\ \ et\ \ n=\omega^2 r+\omega(1-r)$ respectivement

Les points B , $M\ \ et\ \ N$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{m-1}{n-1}\in\mathbb{R}^*$

Ona $m-1=\omega r+\omega^5(1-r)-1=\omega r-\omega^2(1-r)-1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}(2R-1)$

et $n-1=\omega^3 r+\omega(1-r)-1=-\frac{1}{2}-\frac{3r}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}(1-r)$

donc Les points B , $M\ \ et\ \ N$ sont colinéaires $\Leftrightarrow\ \frac{m-1}{n-1}=\frac{-1+i\sqrt{3}(2r-1)}{-(1+3r)+i\sqrt{3}(1-r)}\in\mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{3}(1-r)-(1+3r)\sqrt{3}(2r-1)=0\ \Leftrightarrow\ r^2=\frac{1}{3}\ \Leftrightarrow\ r=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
