DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2x^2-x-1}}{1-x^2} \ ; \ \lim_{x\to+\infty}(x-2)\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x^2+1}} \ ; \ \lim_{x\to 2^-}\frac{\arctan\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-2} \ ;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\frac{\pi}{2}}{x} \ ; \ \lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4+3x}-2\sqrt[3]{x^3+1}.$$

Exercice 2

On pose : $x=\arctan\left(\sqrt{2}\right)$.

1. Vérifier que : $0<\pi-2x<\dfrac{\pi}{2}$.
2. Calculer $\tan(\pi-2x)$ puis en déduire que :

$$\arctan\left(2\sqrt{2}\right)+2\arctan\left(\sqrt{2}\right)=\pi$$

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f.
2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0=0$?

Exercice 4

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x)=\arctan\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$$

1. Montrer que la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
2. Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)\left(\exists!\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right): x=\left(\tan\theta\right)^2$

3 a Montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right) : g(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\left(\sqrt{x}\right)$.

b Déterminer l'expression de g^{-1} la fonction réciproque de g .

Exercice 5

Pour tout entier naturel non nul n on considère la fonction numérique h_n définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par :

$$h_n(x) = x^n + \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

On note $\left(C_n\right)$ la courbe représentative de la fonction h_n dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 Montrer que l'équation $h_n(x) = 1$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $\mathbb{R}^{+}$.

1 Prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^{*})\ :\ 0 < u_n < 1$.

3 a Etudier la position relative des courbes $\left(C_n\right)$ et $\left(C_{n+1}\right)$ sur l'intervalle $]0,1[$.

b En déduire la monotonie de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$.

c Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ est convergente.

d Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

e En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-(u_n)^n\right)$.