DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Exercice 1

On considère les propositions suivantes :

P_1 : " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ :\ x + 2y > 3$ "

P_2 : " $(\exists z \in \mathbb{R})\ :\ z - 1 < \frac{z}{z-1} < z$ "

P_3 : " $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})\ :\ \left[\left(a \neq 1 \text{ et } b \neq 1\right) \Rightarrow \left(a + b \neq 2\right)\right]$

1. Donner les négations des propositions P_1 ; P_2 ; P_3
2. Donner la contraposée de l'implication de la proposition P_3
3. Quelle est la valeur de vérité de la proposition P_3 ?.

Exercice 2

1. En utilisant le raisonnement par disjonction des cas, montrer que :
$$\left(3 \text{ ne divise pas } n\right) \Rightarrow \left(3 \text{ divise } (n^2 - 1)\right)$$
2. On pose $I =]-\infty, -2[$.
   a. Démontrer que : $(\forall a \in I)(\forall b \in I)\ ,\ ab + a + b > 0.$
   b. En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que :
$$(\forall a \in I)(\forall b \in I)\left[(a \neq b) \Rightarrow \left(\frac{a+1}{b^2 + 2b + 2} \neq \frac{b+1}{a^2 + 2a + 2}\right)\right]$$

Exercice 3

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :
   a. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 1 + 2^n(n-1).$
   b. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}.$
2. Soient $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $a \neq b$. On pose $x = \frac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.
   a. Démontrer par l'absurde que : $x \neq b$.

b En utilisant le raisonnement par l'absurde, démontrer que : $x \notin \mathbb{Q}$.
(On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Exercice 4

1 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble non vide.

a Montrer que : $(A-B)-(B-C) = A-(B\cup C)$.

b Montrer que $B-A = (A\cup B)-A$, et en déduire que

$$(A\cup B = A\cup C) \Rightarrow (B-A = C-A)$$

2 Soient E et F deux ensembles définis par :

$$E = \left\{x \in \mathbb{Z} / 2x^2 - x - 15 \leq 0\right\} \text{ et } F = \left\{n \in \mathbb{N} / \frac{2n+16}{n+2} \in \mathbb{N}\right\}$$

a Montrer que $E = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ et $F = \{0,1,2,4,10\}$.

b Déterminer en extension les ensembles : $E\cap F$, $E\cup F$ et $E\Delta F$.

Exercice 5

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

1 a Déterminer $f^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$.

b En déduire que f n'est pas injective.

2 a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ |f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b En déduire que f n'est pas surjective.

1 Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

a Montrer que g est une bijection de $]1,+\infty[$ vers $]0,\frac{1}{2}[$.

b Déterminer l'expression de g^{-1} la bijection réciproque de g.