2eme BIOF SM - https://www.dimamath.com - S. EL JAAFARI



# DEVOIR SURVEILLÉ N°2

## Exercice 1

1. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-4)(x+4)$$

Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet exactement 3 solutions dans $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

   a. Montrer que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et que pour tout réel positif $x$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

   b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$ , $1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1 + \frac{x}{2}$

3. Soit $h$ la fonction définie, continue et dérivable sur $[0,1]$ telle que $h(0) = 0$ , $h(1) = 1$ , $h'(0) = h'(1) = 0$

   a. Montrer que $\exists c \in ]0,1[$ : $\frac{h(c)}{c} = \frac{h(c)-1}{c-1}$

   b. En déduire que $h(c) = c$.

## Exercice 2

On considère les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ par :$u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}\right) - \arctan(n+1)$ et $v_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}\right) - \arctan(n)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\arctan(k+1) - \arctan(k) < \frac{1}{1+k^2} < \arctan(k) - \arctan(k-1)$

2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

## Exercice 3

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ par :

$$f(x) = 1 + 3cos^2(x)$$

1 Montrer que la fonction $f$ est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. On notera $f^{-1}$ sa fonction réciproque.

2 a Justifier que $f^{-1}$ est dérivable sur l'intervalle $]1,4[$ et que pour tout $x$ de $]1,4[$ , $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}$

b Montrer que $\left(\forall x \in \left[\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right[\right); \frac{1}{3} \leq \left(f^{-1}\right)'(x) \leq \frac{2}{3}$.

3 a Calculer $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

b Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $\left]\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right[$.

4 Montrer que $\left(\forall x \in \left]\alpha, \frac{13}{4}\right[\right)$ ; $\frac{1}{3}(x+2\alpha) \leq f^{-1}(x) \leq \frac{1}{3}(2x+\alpha)$

**Exercice 4**

Soit $F$ la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$F(x) = 2x - \frac{1}{\arctan(x)}$$

1 a Montrer que pour tout $x > 0$ , $F'(x) = 2 + \dfrac{1}{(1+x^2)\arctan^2(x)}$

b En déduire que pour tout $x > 0$ , $F'(x) \geq 2$.

2 Montrer que la fonction $F$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vesr un intervalle J à déterminer. On notera $F^{-1}$ sa bijection réciproque.

3 Montrer que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0,+\infty[$ et que $\alpha > 1$

4 a Montrer que $F^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b Déduire que pour tout réel $x$ , $|F^{-1}(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

**Exercice 5**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\arctan x}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

2eme BIOF SM - https://www.dimamath.com - S. EL JAAFARI

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$

1. Etudier la parité de la fonction $f$.
2. a. Montrer que la fonction $f$ est continue en 0.
   b. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall x > 0); \dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$.
   c. Montrer que $f$ est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$
3. a. Montrer que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que
   $(\forall x \in ]0,+\infty[)\ ;\ f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{1+x^2} - \arctan x\right)$
   b. Déduire que $f$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$
4. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ , puis dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$
5. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0,1[$.
6. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan x + \frac{x^2}{2}$$

   a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); g'(x) = \dfrac{x\left(\left(x^2+1\right) - 2x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$
   b. Montrer que $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
7. Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in ]0,1[ \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < u_n < 1$.
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   c. En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

2eme BIOF SM - https://www.dimamath.com - S. EL JAAFARI