DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Exercice 1

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[\,;\ ln(1+x) \leq x \leq (1+x)ln(1+x)$$

3. a. Prouver que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \leq e^n \leq \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

   b. En déduire que :

$$(\forall n \geq 2;\ \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n+1}.$$

4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ puis déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
Soit $m \in \mathbb{C}$ et (E) l'équation telle que :

$$(E) : z^2 + (m - im)z + im + m - 1 = 0$$

1. a. Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = \left((1+i)m-2\right)^2$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 et z_2 les solutions de(E).

2. Dans cette question, on pose $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
   Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

3. Dans ce qui suit, $m \in \mathbb{C} - \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1-i}{2}, i, 1-i\right\}$. On considère les points M, M_1, M_2 et Ω d'affixes respectives $m, im-1, -m+1$ et $\omega = i$.
   Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'ensemble des points M tel que les points M_1, M_2 et M soient alignés.

b. Déterminer l'ensemble des points M tel que les droites (MM_1) et $(MM_2$ soient perpendiculaires.

c. Donner l'écriture complexe de la rotation R puis déterminer l'affixe du point $R(M_1)$.

d. Déterminer l'ensemble des points M tel que les points M, M_1, M_2 et Ω soient cocycliques.

Exercice 3

Partie A

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.
Soit g_n la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g_n(x) = n(x+1)+ln(x)$.

1. Étudier les variations de la fonction g_n et dresser son tableau de variation.
2. a. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution β_n dans $]0,+\infty[$.

   b. Vérifier que $\beta_n \leq e^{-n}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$
3. Déduire le signe de $g_n(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Partie B

Soit f_n la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x\left(ln(x)\right)^n}{1+x} \quad ; \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $\left(C_n\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a. Étudier la continuité de f_n à droite en 0.

   b. Étudier la dérivabilité de f_n à droite en 0 et interpréter ce résultat graphiquement.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique aux résultats obtenus.
3. a. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f_n'(x) = \dfrac{\left(ln(x)\right)^{n-1} \times g_n(x)}{(1+x)^2}$.

   b. Pour chaque cas de la parité de n, dresser le tableau de variation de f_n.

4) Construire la courbe $\left(C_2\right)$.

Partie C

1) Vérifier que $f_n(e)=\dfrac{e}{1+e}$.

2) Montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\left(\forall x\in[1,e]\right);\ f_{n+1}(x)-f_n(x)\leq 0$.

3) a) Montrer que l'équation $\left(E_n\right)$: $f_n(x)=\dfrac{e}{2(1+e)}$ admet une unique solution u_n dans $[1,e]$.

b) Vérifier que $\forall n\geq 2, f_{n+1}(u_n)\leq \dfrac{e}{2(1+e)}$.

c) Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente . On notera β sa limite.

4) a) Montrer que $\forall n\geq 2 : u_n\leq\beta$.

b) En déduire que $\forall n\geq 2 : f_n(u_n)\leq \dfrac{\beta\left(ln(\beta)\right)^n}{1+\beta}$.

5) On suppose que $\beta\in[1,e[$; calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\beta\left(ln(\beta)\right)^n}{1+\beta}$.

6) Déterminer la valeur de β.

Exercice 4

Soit h la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

1) Montrer que h réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$.
On note h^{-1} la fonction réciproque de h.

2) Vérifier que $h^{-1}\left(\sqrt{2}\right)=-ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $h'(x)=\sqrt{h^2(x)-1}$

b) En déduire que h^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que
$$\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{h^{-1}(x)}{x-1}$

5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h^{-1}(x)}{x}$