DEVOIR SURVEILLÉ N°4

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = x^n + 1 - 2e^{-x}$.

$$f_n(x) = x^n + 1 - 2e^{-x}$$

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.
   b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < \alpha_n < ln(2)$.
2. a. Prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : f_{n+1}\left(\alpha_n\right) = \alpha_n\left(\alpha_n - 1\right)$.
   b. Déterminer la monotonie de la suite $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}$ puis déduire qu'elle est convergente.
   c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\alpha_n\right)^n = 0$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Exercice 2

Partie I

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = e^t - (t+1)$.

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R} : e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \int_0^x h(t)\,dt$.
2. Étudier le sens de variation de h sur les intervalles $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $0 \leq \int_0^x h(t)\,dt \leq xh(x)$ et $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{h(x)}{x}$.
4. $x \in \mathbb{R}_-^*$, montrer que $xh(x) \leq \int_0^x h(t)\,dt \leq 0$ et $\dfrac{1}{2} + \dfrac{h(x)}{x} \leq \dfrac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}$.
5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{x}$ puis déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (x+1)}{x^2}$.

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right.$.

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les branches infinies de $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$
4. Montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right) : f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\left(e^x - 1\right)^2}$ où $\varphi(x) = (1-x)e^x - 1$.
5. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
6. Construire la courbe $\left(C_f\right)$.

Partie III

Soit $\left(u_n\right)$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ qu'il faut déterminer.
2. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2\left(e^x - 1\right)^2}$.
   b. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+) : e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$ puis déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}_+) : -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$
3. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   b. Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3

Soit m un nombre complexe.

A - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m) : \quad z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

1. a. Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m).
   b. Donner en fonction de m les solutions de l'équation (E_m).
2. Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les solutions de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

B - Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M, M' et Ω d'affixes respectives $a = -1 - i$, m , $m' = -im - 1 + i$ et $\omega = i$.

1. Soit R la rotation qui transforme M en M'.
   - a. Vérifier que Ω est le centre de R.
   - b. Déterminer l'affixe b du point B tel que $R(B) = A$.
2. - a. Vérifier que $m' - a = \dfrac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$.
   - b. En déduire que les points A, M et M' sont alignés si, et seulement si A, B, Ω et M sont cocycliques.
   - b. Montrer que l'ensemble des points M tels que A, M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.