

Série 5 : CALCUL INTÉGRAL

Exercice 1

Partie I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$.

- 1 Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.
- 2 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N} : I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1})$.
- 3 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1})$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi(n) = I_{n+4} - I_n$.
Calculer $\varphi(n)$ en fonction de n .
- 5
 - a Calculer I_0 et I_2 .
 - b Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{p=0}^{k-1} \varphi(4p+2)$ en fonction de I_2 et I_{4k+2} .
 - c En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{q=0}^{2k} \frac{(-1)^q}{2q+1}$.
- 6
 - a Calculer I_1 et I_3 .
 - b Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{p=0}^{k-1} \varphi(4p+1)$ en fonction de I_1 et I_{4k+1} .
 - c En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{q=1}^{2k} \frac{(-1)^{q+1}}{q}$.

Partie II

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$K_n(\alpha) = \int_0^\alpha (\tan x)^n dx \text{ et } S_n(\alpha) = \sum_{m=1}^n K_m(\alpha)$$

- 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |S_n(\alpha) - \int_0^\alpha \frac{\tan x}{1 - \tan x} dx| \leq \frac{\alpha(\tan \alpha)^{n+1}}{1 - \tan \alpha}$.
- 2 En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\tan x}{1 - \tan x} dx$.

Partie III

Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, on pose $A(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\tan x}{1 - \tan x} dx$ et Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{m=1}^n I_m.$$

1 Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$.

a Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R} - 1 : \frac{u}{(1-u)(1+u^2)} = \frac{1}{2(1-u)} + \frac{u-1}{2(1+u^2)}.$

b En utilisant le changement de variable $u = \tan x$, calculer $A(\alpha)$ en fonction de α et de $\tan \alpha$.

c Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} A(\alpha)$

et en déduire que $(\exists \beta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[) : A(\alpha) > M + 1.$

d Montrer que $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0), |S_n(\beta) - A(\beta)| \leq 1.$

2 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[) : S_n \geq S_n(\alpha).$

3 Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx.$

1 a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{2(n!)}.$

b En déduire que la suite (I_n) est convergente et préciser sa limite.

2 a Calculer I_1 (On pourra utiliser une intégration par parties).

b Montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}^*) : I_{p+1} = I_p - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{p+1}}{(p+1)!}.$

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{(\ln 2)^p}{p!}.$

a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_n = 1 - 2I_n.$

b En déduire que la suite (S_n) est convergente et préciser sa limite.

4 Déterminer, en justifiant votre réponse, la limite de la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : V_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{(2n+k)^2} \ln^2 \left(1 + \frac{k}{2n}\right)$$

Exercice 3

Partie I

On considère la fonction réelle f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Vérifier que $(\forall x \in]0, +\infty[) : f(x) = e^{-(\ln x)^2}$
- 2
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
 - c Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 3 Construire la courbe (C_f) .

Partie II

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} \int_1^{e^x} \frac{f(t)}{t} dt & ; \quad x > 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$.

- 1 Montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[) : F(x) = \frac{1}{x} \int_1^{e^x} e^{-t^2} dt$.
- 2
 - a Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[) : e^{-x^2} < F(x) \leq 1$.
 - b En déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant la valeur de $F'_d(0)$.
- 3
 - a Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[) : 0 \leq \int_1^x e^{-t^2} dt \leq e^{-1} - e^{-x}$.
 - b En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- 4
 - a Montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[) : F'(x) = \frac{1}{x} (e^{-x^2} - F(x))$.
 - b Dresser le tableau de variation de la fonction F .
 - c Construire la courbe (Γ) .
- 5 On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout entier

naturel n par : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n^2]{e^{k^2}}}.$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = F(1).$

Exercice 4

Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right).$

1 a Montrer que

$$\left(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket\right) : \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

b Déduire que

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - 1\right) : S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq S_n + \frac{\ln(n)}{n}.$$

2 a Montrer que

$$\left(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket\right) : -1 + \frac{1}{n} \leq S_n \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}.$$

b En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$

3 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}.$