Série 1 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Dans tous les exercices de cette série, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Exercice 1

Dans l'espace, on considère les points $A(2,2,2)$; $B(0,-1,-1)$ et $C(1,-2,1)$.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$
   b. Calculer les longueurs AB , AC et BC.
2. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).
4. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(9,-1,-5)$ est normal au plan (ABC).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Parmi les points $E(1,1,1)$, $O(0,0,0)$ et $F(-2,-9,-3)$ quels sont ceux qui appartiennent au plan (ABC) ?

Exercice 2

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(1,2,-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2,3,1)$.
2. Soit le plan (Q) : $2x+3y-z+4=0$.
   a. Déterminer les coordonnées d'un point B du plan (Q).
   b. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan (Q).
   c. Montrer que le point $C(1,0,1)$ n'appartient pas au plan (Q).
3. Soit (D) la droite passant par le point C et orthogonale au plan (Q).
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).
   b. Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point C sur le plan (Q).

Exercice 3

Dans l'espace, on considère les points $A(0,-2,-2)$; $B(1,-2,-4)$ et $C(-3,-1,2)$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
   b. En déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit (S) la sphère d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$. Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,0,1)$ et que son rayon est $R = 5$.
3. a. Vérifier que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC).
   b. Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
4. Vérifier que $d\big(\Omega,(ABC)\big) = 3$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4 dont on déterminera le centre.

Exercice 4

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(2,1,2)$ et de rayon $R = 3$, et soit (P) le plan passant par le point $A(-1,0,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(4,0,-3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (P).
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (P).
   b. Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (P) .
4. a. Calculer $d\big(\Omega,(P)\big)$.
   b. Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et déterminer les coordonnées de leur point de tangence.

Exercice 5

Dans l'espace, on considère le point $A(1,-1,3)$ et le plan (P) d'équation cartésienne $x - y + 3z = 0$.

1 a Vérifier que $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (OA).

b Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) qui est perpendiculaire à la droite (OA) au point A.

c Montrer que les plans (P) et (Q) sont parallèles.

2 On considère la sphère (S) qui est tangente au plan (Q) au point A et qui se coupe avec le plan (P) suivant le cercle (C) de centre O et de rayon $r = \sqrt{33}$.

a Montrer que le centre $\Omega(a, b, c)$ de la sphère (S) appartient à la droite (OA) puis en déduire que $b = -a$ et $c = 3a$.

b Montrer que : $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$ et en déduire que : $a - b + 3c = -11$.

c Déduire les coordonnées du point Ω puis montrer que le rayon de la sphère (S) est égal à $2\sqrt{11}$.

Exercice 6

Dans l'espace, on considère les points $A(0, 1, -1)$, $B(1, 2, 1)$ et $C(5, 10, 1)$.

1 Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -16\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$.

2 Calculer la distance entre le point C et la droite (AB).

3 Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

4 a Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant la relation : $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 20y - 2z + 70 = 0$.

a Montrer que (S) est une sphère de centre C et de rayon $2\sqrt{14}$.

b Montrer que la droite (AB) est tangente à la sphère (S) puis déterminer les coordonnées de leur point de tangence.

« Une once de pratique vaut mieux que des tonnes de discours »

MAHATMA GANDHI