

Sujet 5

Exercice 1

Partie I

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n + 3}{U_n + 2} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Calculer U_1 et U_2
- 2 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < 3$.
- 3 a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n = \frac{(1 + U_n)(3 - U_n)}{2 + U_n}$.
b En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
- 4 Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Partie II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \frac{1 + U_n}{3 - U_n}$.

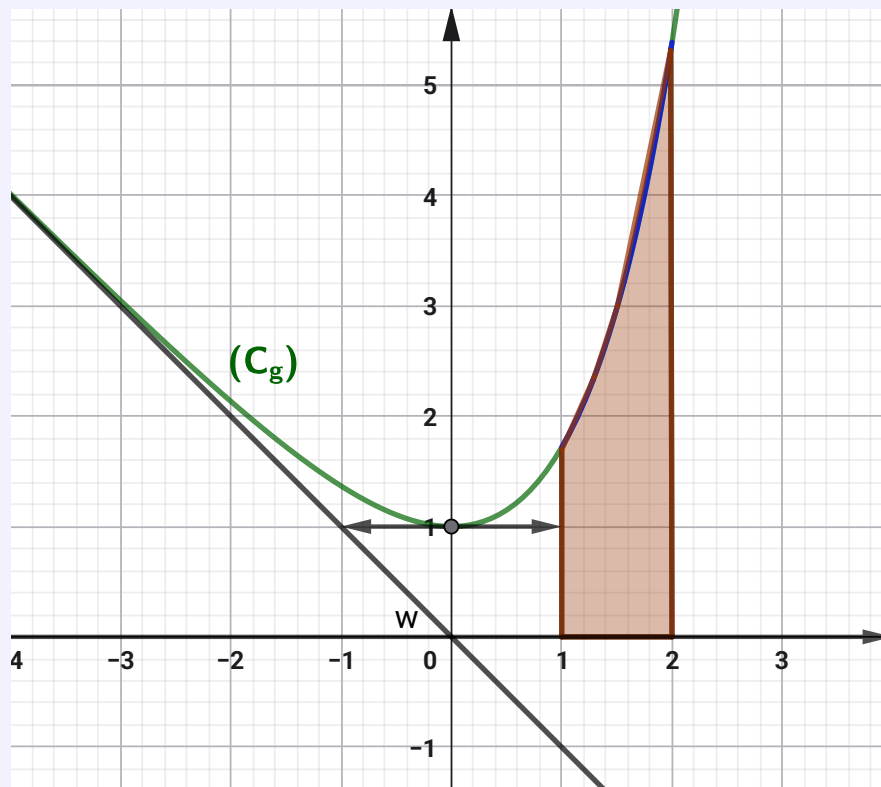
- 1 a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : V_n = \frac{4}{3 - U_n} - 1$.
b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : -1 < V_n < -\frac{2}{3}$.
- 2 a Montrer que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 5.
b Déterminer V_n en fonction de n .
- 3 a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n = \frac{3V_n - 1}{V_n + 1}$.
b Déduire l'expression de U_n en fonction de n .
- 4 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Partie III

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$
et $T_n = \frac{4}{3 - U_0} + \frac{4}{3 - U_1} + \frac{4}{3 - U_2} + \dots + \frac{4}{3 - U_n}$.

- ① Exprimer S_n en fonction de n .
- ② Exprimer T_n en fonction de S_n puis en déduire l'expression de T_n en fonction de n .
- ② Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

Exercice 2



Figure

On considère g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est la courbe (C_g) ci-dessus et soit (D) la droite d'équation $y = -x$ l'asymptote à (C_g) au voisinage de $-\infty$.

- ① A partir de la figure ci-dessus, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) + x).$$

- ② Dresser le tableau de variation de la fonction g
- ③ Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.
- ④ On suppose dans cette question que $g(x) = e^x - x$.
Calculer en unité d'aire, l'aire de la partie colorée dans la figure ci-dessus.

Exercice 3

Partie I

Soit h la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = x(x-1) + \ln(x).$$

- 1 a Déterminer $h'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.
- b Étudier les variations de la fonction h .
- 2 Calculer $h(1)$ puis déduire le signe de $h(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 + (\ln(x))^2.$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 3 a Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{2h(x)}{x}$.
- b En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
- 4 Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prend $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$).

Partie III

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, 1]$.

- 1 Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2 Construire dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1} .

FIN