Sujet 5

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3\,u_n+2}{2\,u_n+3} \end{cases} \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n \geq 1$.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{2(1-u_n)(1+u_n)}{2\,u_n+3}$ puis préciser la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n : $1\leq u_n \leq 2$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. a. Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_{n+1}-1 \leq \dfrac{1}{5}(u_n-1)$.
   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $|u_n-1| \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
   c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.
   a. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   d. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k+1}$.
   Exprimer S_n et T_n en fonction de n.
   e. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

Exercice 2

Partie I :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on considère l'équation $(E) : z^2-\left(\sqrt{3}+1\right)z+2=0$.

1. Vérifier que le discrimnant de l'équation (E) est $\Delta = -\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.
2. En déduire les solutions de l'équation (E).
3. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(E') : y'' - \left(\sqrt{3}+1\right)y' + 2 = 0$.
4. Déterminer g la solution de l'équation différentielle (E') qui vérifie les conditions initiales $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

Partie II :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\,\vec{j}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 1 - i$ et $b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$.

1. a. Montrer que $\dfrac{b}{a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   b. En déduire la nature du triangle OAB.
2. a. Déterminer la forme trigonométrique de b.
   b. En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que b^{12} est un réel.
3. Soient C et D deux points du plan complexe d'affixes respectives $c = b^{10}$ et $d = \bar{b}$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.
   a. Montrer que E l'image de C par la rotation R a pour affixe $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b^{11}$.
   b. Montrer que les points O, D et E sont alignés.
4. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que $|z-1+i| + |iz-1-i| = 2\sqrt{2}$.

Exercice 3

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 - \left(ln(x)\right)^2$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.
2. a. Montrer que $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right) : g'(x) = -2\dfrac{ln(x)}{x}$.
   b. Déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $]0,1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$
3. a. Calculer $g(e)$ et $g\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $]0,+\infty[$.

c) Déduire que $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]\right) : g(x) \geq 0$ et que $\left(\forall x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e,+\infty[\right) : g(x) \leq 0$.

Partie II :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{x}\left(1+ln(x)\right)^2$, et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. $\left(\|\vec{i}\| = 1cm\right)$

1) Vérifier que l'ensemble de définition de f est $D_f =]0,+\infty[$.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat. $\left(\right.$ on pourra utiliser le changement de variable $x = t^2\left.\right)$

3) Montrer que $\forall x \in D_f \; : \; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

4) Dresser le tableau de variation de f sur D_f.

Partie III :

On considère la fonction numérique h définie par $h(x) = f(x) - x$ et soit (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (Voir la figure ci-dessous).

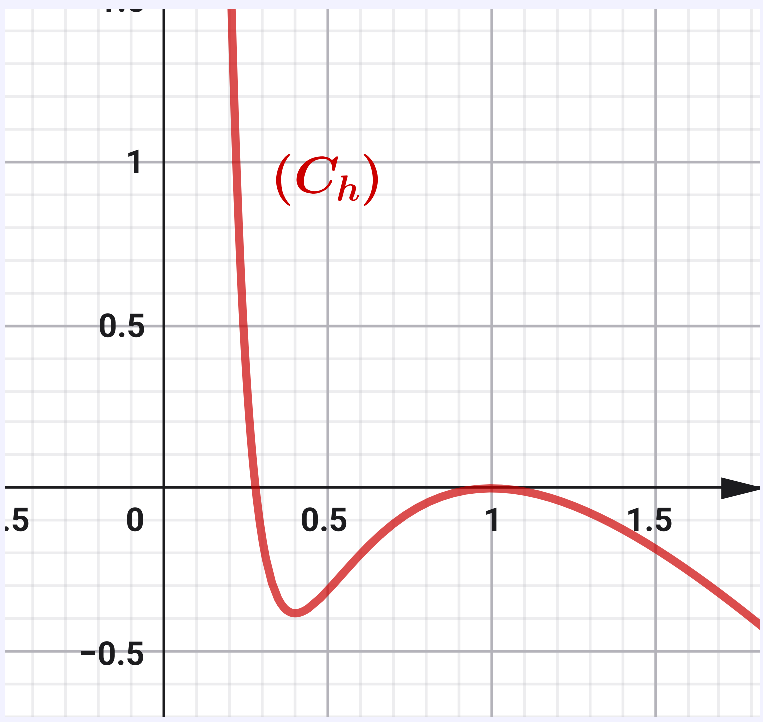

Figure 1

1 a Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $h(x) = 0$ pour $x > 0$.

b On donne le tableau suivant de quelques valeurs de $h(x)$:

x	0,1	0,2	0,3	0,4
h(x)	16,86	1,65	-0,16	-0,38

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution α telle que $0,2 < \alpha < 0.3$.

2 a Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe $\left(C_f\right)$ en deux points d'abscisses 1 et α.

b A partir de la courbe $\left(C_h\right)$, déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [1,e]$, et déduire que $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1,e]$.

3 Dans le même repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, construire la droite (Δ) et la courbe $\left(C_f\right)$.

$\Big($On donne $\frac{4}{e} \simeq 1,47$ et on admet que la courbe $\left(C_f\right)$ admet deux points d'inflexion $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{50}\right) et \left(5,\frac{34}{25}\right)\Big)$.

4 a Montrer que la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{3}\left(1+ln(x)\right)^3$ est une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

b Montrer que l'aire du domaine plan délimité par la courbe $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$ est égale à $\frac{8}{3}cm^2$.

Partie IV :

On considère la suite numérique (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq x_n \leq e$.

2 Montrer que (x_n) est une suite décroissante.

3 Déduire que la suite (x_n) est convergente puis déterminer sa limite.