

◇◇◇ ETS MAARIF ◇◇◇			A.S. : 2025/2026
Matière: Mathématiques	2bac p.c	Date: 13/02/2025	Durée :3 heures
BLANC N° 1 S_{II}			

Exercice 1 (2.25 pt) :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

- ① Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}), 1 \leq u_n \leq 2$ (1pt)
- ② **a** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - u_n)$ (0.5pt)
- b** En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 2 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (0.5pt)
- c** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (0.25pt)

Exercice 2 (2pts) :

- ① Calculer l'intégrale $\int_0^1 (x^2 + e^{2x}) dx$ (0.75pt)
- ② En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 x e^x dx = 1$ (0.75pt)
- ③ En déduire que $\int_0^1 (x + e^x)^2 dx = \frac{3e^2 - 11}{6}$ (0.5 pt)

Exercice 3(5pts) :

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - (2x + 1)$.

- ① Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2(e^{2x} - 1)$ (0.5pt)
- ② Donner le tableau de variations de g (0.5pt)
- ③ En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}), g(x) \geq 0$ (0.25pt)

Partie II

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x + 1) \left(\frac{1}{e^{2x}} + 1 \right)$.

- ① Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (1pt)
- ② Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis en déduire une interprétation graphique. (0.5pt)
- ③ Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$. (0.5pt)

- 4 Déterminer la position relative de (C_f) et (Δ) (0.25pt)
- 5 a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$. (remarquer $f'(0) = 0$) (0.5 pt)
- b En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (0.25pt)
- 6 Tracer la courbe de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. (0.75pt)

Exercice 4(10.75pts) :

Partie I Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{4}(x - \ln x) \ln x$, soit (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

- 1 a Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. utiliser $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \ln x \right)$ (0.5pt)
- b Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ (0.5pt)
- 2 Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement. (0.5pt)

- 3 a Montrer que : $f'(x) = 1 + \frac{g(x)}{4x}$ où $g(x) = x + (x - 2) \ln x$ pour tout x dans $]0; +\infty[$. (0.75pt)

- b Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
À partir de ce tableau, déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ (0.5pt)

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	$+\infty$	$g(1)$	$+\infty$

- c Dresser le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$. (0.5pt)
- 4 a Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ (0.5pt)
- b Dresser le tableau des variations de f^{-1} sur $\mathbb{R}$ (0.25pt)
- 5 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0; 1[$ (0.75pt)
- 6 Construire (C) la courbe de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prend $\alpha \approx 0,36$). (0.75pt)
- 7 a Montrer que $H : x \mapsto 2x + x(\ln x - 2) \ln x$ est une fonction primitive de $h : x \mapsto (\ln x)^2$ sur $]0; +\infty[$,
puis déduire que : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ (0.75pt)
- b À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$ (0.75pt)
- c Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (0.75pt)

Partie II On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$.

1 a Vérifier que $h(1) = 0$ (0.25pt)

b Dans la figure ci-contre, (C_h) est la représentation graphique de la fonction h . Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$, puis déduire que $f(x) \geq x$ pour tout x dans $[1; +\infty[$ (0.75pt)

Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2 a Montrer par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ (0.75pt)

b Montrer que (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente. (0.75pt)

c Calculer la limite de la suite (u_n) (0.5pt)

