

Sujet 8

Exercice 1

I - Soit m un nombre complexe tel que $m \neq i$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (m - i)z + (m - i)^2 = 0$

II - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère ortho-normé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'afixes respectives

$$z_A = i - m, z_B = (m - i)j, z_C = (m - i)\bar{j} \text{ et } z_D = (i - m)j \text{ où } j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- 1
 - a Vérifier que $j^2 = \bar{j}$, $1 + j + \bar{j} = 0$ et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
 - b Montrer que $R_1(C) = B$.
 - c Donner l'écriture complexe puis la nature de la transformation $R_2 \circ R_1$
- 2 Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
- 3 Montrer que le quadrilatère ABOC est un losange.

Exercice 2

Partie I :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = n \ln(1 + x) + \frac{x}{1 + x}.$$

- 1 Montrer que la fonction g_n est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et calculer $g'_n(x)$ pour tout $x \in] -1, +\infty[$.
- 2 Étudier le sens de variation de la fonction g_n puis dresser son tableau de variation.
- 3 En déduire le signe de $g_n(x)$ pour tout $x \in] -1, +\infty[$.

Partie II :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x)$$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(On distinguera les cas de la parité de n pour la première limite).

- 2 a Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et que

$$(\forall x \in] -1, +\infty[) : f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$$

- b Étudier le sens de variation de f_n selon la parité de n puis dresser son tableau de variation.

- 3 Construire dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_1) et (C_2) .

Partie III :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- 1 a Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$.

- b Montrer que $u_1 = \frac{1}{4}$.

- 2 a Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone.

- b Dédire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

- c Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

- d Dédire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

- 3 Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

- a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - 1) : S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

- b En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - 1) : \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$.

- c Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - 1) : u_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\ln 2 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right)$.

- d En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

$$(\text{On pourra montrer que } \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+2})$$

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, on pose $\varphi(z) = i \left(\frac{z-2i}{z-i} \right)$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = i$ et M le point d'affixe un nombre complexe z .

I - ① Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{i\} : |\varphi(z)| = \frac{AM}{BM}$

et $\forall z \in \mathbb{C} - \{i, 2i\} : \arg(\varphi(z)) \equiv \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM} \right) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$

② Déterminer la nature de chacun des deux ensembles :

$$(E) = \{M(z)/\varphi(z) = 1\} \quad ; \quad (F) = \{M(z)/\varphi(z) \in i\mathbb{R}\}$$

II - ① Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{i\} : \begin{cases} |\varphi(z) - i| = \frac{1}{|z - i|} \\ \arg(\varphi(z) - i) \equiv -\arg(z - i) [2\pi] \end{cases}$.

② Montrer que si le point $M(z)$ appartient au cercle (C) de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$, alors le point $M'(\varphi(z))$ appartient à un cercle (C') dont on déterminera les éléments caractéristiques.

③ Construire le point $M'(\varphi(z))$ à partir du point $M(z)$.

III - ① Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\varphi(z) = z$. On notera par u et v les solutions de cette équation tel que $\operatorname{Re}(u) = 1$.

② Soit $z \in \mathbb{C} - \{i, u, v\}$. On considère les points $M(z)$; $M'(\varphi(z))$; $C(u)$ et $D(v)$.

a Montrer que $\frac{\varphi(z) - u}{\varphi(z) - v} = -\frac{z - u}{z - v}$

b En déduire que $\left(\overrightarrow{M'D}, \overrightarrow{M'C} \right) \equiv \left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC} \right) [2\pi]$.

c Montrer que si les points M, C et D sont alignés, alors les points M' , M, C et D sont alignés.

Et si les points M, C et D ne sont pas alignés, alors les points M' , M, C et D sont cocycliques.

IV - On pose $z = i + e^{i\theta}$ où $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Déterminer le module et un argument de $\varphi(z)$.

Exercice 4

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2 - x)e^x - 2$.

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- 2 Dresser le tableau de variation de la fonction g .
- 3 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$ et que $1 < \alpha < 2$.
- 4 Déterminer le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$.

- 1 Étudier la continuité de la fonction f en 0.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3
 - a Étudier la dérivabilité de f en 0
 - b Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{x g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

- c Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 4 Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
- 5 Construire la courbe (C_f) .

Partie III :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ et $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$

- 1 Calculer $G(x)$ en fonction de x puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.
- 2 Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- 3
 - a Montrer que $\forall t \in [\ln 2, +\infty[: f(t) \leq 2te^{-t}$.
 - b Montrer que la fonction F est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

Partie IV :

On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$ où $L \in \mathbb{R}$.

- 1
 - a Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \sum_{p=1}^n e^{-px}$.
 - b Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^+) : 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt} dt \leq \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$.
 - c Calculer en fonction de n et x , l'intégrale $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$.
 - d Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$.
- 2
 - a Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \int_0^x f(t)e^{-nt} dt = F(x) - \sum_{p=1}^n I_p(x)$.
 - b En déduire que la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-nt} dt$ admet une limite finie au voisinage de $+\infty$.
 - c Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $L_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)e^{-nt} dt$.
Montrer que $L - L_n = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}\right)$.
 - d Montrer que la suite réelle $(L_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
 - d On considère la suite numérique $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$.
Montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{L}{2}$.