

## Série 2 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Dans tous les exercices de cette série, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

### Exercice 1

- 1 Soit  $(D)$  la droite passant par le point  $A(-1, 1, 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2, 1, -1)$ .
  - a Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(D)$ .
  - b Les points  $E(1, 1, -1)$  et  $F(7, 5, -2)$  appartiennent-ils à la droite  $(D)$ ?
- 2 Soient  $I(1, 2, 1)$  et  $J(3, 5, -2)$  deux points de l'espace.
  - a Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(IJ)$ .
  - b Les points  $K(3, 5, -2)$  et  $F(-1, -1, 2)$  appartiennent-ils à la droite  $(IJ)$ ?
- 3 Soit  $(P)$  le plan passant par le point  $A(1, -1, 2)$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}(1, 2, -2)$  et  $\vec{v}(-1, 0, 3)$ .
  - a Déterminer une équation cartésienne du plan  $(P)$ .
  - b Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan  $(P)$ .
  - c Soit  $B(2, -1, 5)$  un point de l'espace. Calculer la distance du point B au plan  $(P)$ .

### Exercice 2

- 1 Déterminer une équation cartésienne du plan  $(Q)$  passant par le point  $E(1, 2, -1)$  et de vecteur normal  $\vec{u}(-2, 3, 1)$ .
- 2 Soit  $(P)$  le plan défini par l'équation cartésienne  $(P) : 2x + 3y - z + 4 = 0$ .
  - a Déterminer les coordonnées d'un point A appartenant au plan  $(P)$ .
  - b Déterminer les coordonnées d'un vecteur  $\vec{n}$  normal au plan  $(P)$ .
  - c Vérifier que le point  $B(1, 0, 1)$  n'appartient pas au plan  $(P)$ .
- 3 Soit  $(D)$  la droite passant par le point B et orthogonale au plan  $(P)$ .
  - a Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(D)$ .

- b Déterminer les coordonnées du point H le projeté de B sur le plan (P).

### Exercice 3

On considère dans l'espace les trois points  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(1, 3, 1)$  et  $C(1, 0, 1)$  et la sphère (S) de centre  $\Omega(-3, 0, 1)$  et de rayon  $R = 2\sqrt{2}$ .

- 1 a Montrer que  $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -\vec{i} + \vec{k}$  où O est l'origine du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ 
  - b Vérifier que :  $x - z = 0$  est une équation cartésienne du plan (OAB).
- 2 a Calculer la distance du point  $\Omega$  au plan (OAB).
  - b Que peut-on conclure ?.
- 3 Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S).
- 4 Soit (D) la droite passant par le point  $\Omega$  et orthogonale au plan (OAB).
  - a Montrer que  $\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  est une représentation paramétrique de la droite (D).
  - b Déterminer les coordonnées du point H le point d'intersection de la sphère (S) et du plan (OAB).
- 5 Montrer que la droite (T) passant le point C et de vecteur directeur  $\vec{v}(2, 0, -2)$  est tangente à la sphère (S).

### Exercice 4

On considère dans l'espace les trois points  $A(-1, 0, 3)$ ,  $B(3, 0, 0)$  et  $C(7, 1, -3)$  et la sphère (S) d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ .

- 1 Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$  et en déduire que  $3x + 4z - 9 = 0$  est une équation cartésienne du plan (ABC).
- 2 Montrer que (S) est la sphère de centre  $\Omega(3, 1, 0)$  et de rayon 5.
- 3 Soit ( $\Delta$ ) la droite passant par le point  $\Omega$  et orthogonale au plan (ABC).
  - a Montrer que  $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  est une représentation paramétrique de la droite ( $\Delta$ ).

- b Montrer que la droite  $(\Delta)$  coupe la sphère  $(S)$  aux deux points  $E(6, 1, 4)$  et  $F(0, 1, -4)$

### Exercice 5

On considère dans l'espace le point  $A(0, 0, 1)$ , le plan  $(P)$  d'équation  $(P) : 2x + y - 2z - 7 = 0$  et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(0, 3, -2)$  et de rayon 3.

- 1 a Montrer que  $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  est une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point A et orthogonale au plan  $(P)$ .
- b Vérifier que  $H(2, 1, -1)$  est le point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et du plan  $(P)$ .
- 2 a Montrer que  $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$  où  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ .
- b Montrer que la distance du point  $\Omega$  à la droite  $(\Delta)$  est égale à 3..
- c En déduire que la droite  $(\Delta)$  est tangente à la sphère  $(S)$  et vérifier que le point H est le point d'intersection entre la droite  $(\Delta)$  et la sphère  $(S)$ .

### Exercice 6

On considère dans l'espace le point  $A(2, 0, 2)$ , le plan  $(P)$  d'équation  $(P) : x + y - z - 3 = 0$ .

- 1 Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  passant par le point A et orthogonale au plan  $(P)$ .
- 2 Déterminer les coordonnées de B le point d'intersection de la droite  $(D)$  et du plan  $(P)$ .
- 3 On considère la sphère  $(S)$  de centre A et qui coupe le plan  $(P)$  suivant le cercle de centre B et de rayon 2.
  - a Déterminer le rayon de la sphère  $(S)$ .
  - b Donner une équation cartésienne de la sphère  $(S)$ .

### Exercice 7

On considère dans l'espace le plan  $(P)$  et la sphère  $(S)$  définis respectivement par les équations cartésiennes suivantes :

$$(\mathcal{P}) : x - 2y + 2z - 2 = 0$$

$$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0.$$

- 1 Déterminer le centre et le rayon de la sphère  $(\mathcal{S})$ .
- 2 Montrer que le plan  $(\mathcal{P})$  est tangent à la sphère  $(\mathcal{S})$ .
- 3 Déterminer les coordonnées du point d'intersection du plan  $(\mathcal{P})$  et la sphère  $(\mathcal{S})$ .

### Exercice 8

Soit  $(\mathcal{S})$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2 = 0$$

- 1 Montrer que  $(\mathcal{S})$  est une sphère de centre  $\Omega(0, 2, -1)$  et de rayon  $R = \sqrt{3}$ .
- 2
  - a Vérifier que le point  $A(-1, 1, 0)$  appartient à la sphère  $(\mathcal{S})$ .
  - b Écrire une équation cartésienne du plan  $(\mathcal{P})$  tangent à la sphère  $(\mathcal{S})$  au point A.
- 3
  - a Vérifier que :  $x + y + z - 2 = 0$  est une équation du plan  $(\mathcal{Q})$  passant par le point  $B(1, 3, -2)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(1, 1, 1)$ .
  - b Montrer que le plan  $(\mathcal{Q})$  coupe la sphère  $(\mathcal{S})$  suivant un cercle  $(\mathcal{C})$  dont on déterminera le centre et le rayon.

★★★★★★

"Une once de pratique vaut mieux que des tonnes de discours" .  
Gandhi

