

exercices geometrie dans l'espace

Exercice 1

Calculer le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les deux cas :

- 1 $\vec{u}(2; -1; 4)$ et $\vec{v}(-1; -5; 2)$
- 2 $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

Exercice 2

On considère les deux vecteurs :

$$\vec{u}(4; -1; 2) \quad \text{et} \quad \vec{v}(3; 2; -5)$$

Montrer que :

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

Exercice 3

On considère les points $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 5, 6)$ et $C(0, 1, -1)$.

- ➊ Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- ➋ Calculer les deux distances : AB et AC .

Exercice 4

On considère les points $A(0; 1; 2)$, $B(-1; 5; 6)$ et $C(0; 1; -1)$.

- ➊ Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- ➋ Calculer les deux distances : AB et AC .

Exercice 5

On considère les points $A(1; 2; 0)$, $B(-1; 0; 4)$ et $C(-1; 2; 0)$.

- ➊ Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
- ➋ Que peut-on en déduire ?

Exercice 6

On considère les deux droites :

$$(\Delta_1) : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3t \\ z = 7 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et

$$(\Delta_2) : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 4 \\ z = 3 - t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Montrer que $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$.

Exercice 7

Déterminer un vecteur normal au plan (P) dans les cas suivants :

- 1 $(P) : 2x - y + 4z - 1 = 0$
- 2 $(P) : x + z + 1 = 0$
- 3 $(P) : x = 5$
- 4 $(P) : z + 2 = 0$

Exercice 8

Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans les cas suivants :

- 1 $A(1; -2; 0)$ et $\vec{n}(2; 3; -1)$
- 2 $A(1; -1; 1)$ et $\vec{n}(0; 2; -1)$

Exercice 9

Déterminer, dans chacun des deux cas suivants, une équation cartésienne du plan (P) , l'ensemble des points $M(x; y; z)$ qui vérifient : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

- 1 $A(-4; -2; 1)$, $\vec{u}(0; -3; 4)$ et $k = 2$
- 2 $A(0; -1; 3)$, $\vec{u}(1; -2; -2)$ et $k = 0$

Exercice 10

On considère la droite (Δ) :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et le point $A(0; 2; -1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par A et orthogonal à (Δ) .

Exercice 11

On considère le plan (P) défini par l'équation :

$$(P) : 4x - y + z - 1 = 0$$

Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) parallèle à (P) et passant par le point $A(2; 1; -2)$.

Exercice 12

On considère les deux plans :

$$(P) : x - y + 5z - 1 = 0$$

et

$$(Q) : 4x - y - z + 6 = 0$$

Montrer que $(P) \perp (Q)$.

Exercice 13

Déterminer l'ensemble des points $M(x; y; z)$ dans les cas suivants :

① $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z + 4 = 0$

② $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 2 = 0$

③ $2x + 2y + 2z + 2 = 0$

Exercice 14

On considère la sphère (S) de centre $\Omega(1; 0; 0)$ et de rayon $R = 1$ et soit le plan :

$$(P) : x + y + z - 1 = 0$$

① Calculer $d(\Omega; (P))$

② En déduire la position relative de la sphère (S) et du plan (P)

Exercice 15

Soit la sphère (S) d'équation :

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$$

et le point $A(3; -2; 5)$

① Vérifier que $A \in (S)$

② Écrire une équation cartésienne du plan (P) tangent à la sphère (S) au point A

Exercice 16

On considère le plan $(P) : x + 3y - z + \alpha = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$$

① Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S)

- 2 Déterminer la distance $d(\Omega; (P))$ en fonction de α
- 3 Déterminer α sachant que (P) est tangent à (S)

Exercice 17

On considère la sphère (S) et le plan (P) tels que :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0 \quad \text{et} \quad (P) : x + y - 3 = 0$$

- 1 Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S)
- 2 Calculer $d(\Omega; (P))$ et en déduire que (P) est tangent à (S)
- 3 Déterminer le point de tangence H de (P) et (S)

Exercice 18

Étudier la position relative de la droite (D) et de la sphère (S) dans les cas suivants :

$$1 \quad (S) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \quad \text{et} \quad (D) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$2 \quad (S) : (x - 6)^2 + y^2 + z^2 = 30 \quad \text{et} \quad (D) : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$3 \quad (S) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 2 \quad \text{et} \quad (D) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice 19

On considère les deux vecteurs $\vec{u}(2; 4; -1)$ et $\vec{v}(-1; 0; 2)$. Déterminer le triplet de coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exercice 20

On considère les points $A(2; 1; 3)$, $B(0; -3; 1)$ et $C(3; 3; 4)$.

- 1 Déterminer le triplet de coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
- 2 A , B et C sont-ils des points alignés ?

Exercice 21

On considère les points $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$ et $C(-3; 2; 5)$ et soit (P) le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0$

I

- 1 Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} - \vec{k}$
- 2 En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)
- 3 Montrer que (ABC) et (P) sont orthogonaux

II

Soit (Δ) la droite passant par A et orthogonale au plan (P)

- 1 Donner une représentation paramétrique de (Δ)
- 2 Déterminer l'intersection de (Δ) et (P)

III

Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 1 = 0$$

- 1 Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(0; 1; 1)$ et de rayon $R = 1$
- 2 Calculer $d(\Omega; (P))$
- 3 Déterminer l'intersection de (S) et (P)

Exercice 22

On considère la sphère (S) et le plan (P) tels que :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad (P) : 4x + 3y - 3 = 0$$

- 1 Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont il faut déterminer le centre et le rayon.
- 2 Vérifier que $A(2; 2; -1)$ appartient à la sphère (S) puis déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à (S) au point A .
- 3 Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S') de centre $B(1; -1; 0)$ et tangente au plan (P) .

Exercice 23

On considère dans l'espace le point $A(1; 1; 5)$, la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 2z - 19 = 0$$

et le plan (P) d'équation :

$$3x + 4z + 22 = 0$$

- 1 a) Vérifier que $A \in (S)$
b) Montrer que 5 est le rayon de la sphère (S) et déterminer le triplet de coordonnées de son centre Ω

- 2 On considère la droite (D) de représentation paramétrique :

$$(D) : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = t \\ z = 8 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- a Calculer $d(\Omega; (D))$ puis déduire que (D) est tangente à la sphère (S)
 - b Vérifier que $A \in (D)$ et déduire le point de tangence de (D) et (S)
- 3
- a Calculer $d(\Omega; (P))$ et déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle (C) de rayon $r = 3$
 - b Déterminer le triplet de coordonnées du centre I du cercle (C)
 - c Montrer que I est la projection orthogonale du point A sur le plan (P)

Exercice 24

On considère les points $A(0; 0; -1)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$ et $E(4; 2; 3)$

- 1 Déterminer le triplet des coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que $x + 2y - 2z - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2 Montrer que A , B , C et E sont des points coplanaires
- 3 Montrer que l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{EM} = 0$ est une sphère (S) de centre $\Omega(2; 1; 1)$ et de rayon $R = 3$
- 4 Vérifier que $\Omega \in (ABC)$ puis en déduire la position relative de (S) et (ABC)
- 5 Soit (Δ) la droite qui passe par Ω et orthogonale à (ABC) . Montrer que $d(O; (\Delta)) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ avec O l'origine du repère

Exercice 25

On considère les deux points $E(2; 1; 0)$ et $F(4; 2; 2)$ et la sphère (S) de diamètre $[EF]$

- 1 Écrire une équation cartésienne du plan (P) qui passe par F et orthogonal à (EF)
- 2 Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)
- 3 Montrer que (P) est tangent à (S) et déterminer le point de tangence
- 4 Soit (Δ) la droite passant par E et de vecteur directeur $\vec{u}(0; -2; 1)$
 - a Montrer que (Δ) est strictement parallèle à (P)
 - b Montrer que (Δ) est tangente à (S) et déterminer le point de tangence
- 5 Montrer qu'il existe deux plans orthogonaux à (Δ) et chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $R' = 1$

Exercice 26

On considère dans l'espace les points $A(2; -4; 3)$, $B(2; -2; 0)$, $C(0; 2; -3)$ et $E(2; -4; 1)$

- 1 a) Vérifier que les points A , B et C déterminent un plan unique de l'espace
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2 a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{EC}$
b) En déduire une équation cartésienne du plan (Q) passant par A et B et parallèle à la droite (EC)

Exercice 27

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, le plan (P) d'équation cartésienne $x + y - z + 1 = 0$ et la droite (D) définie par :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- 1 Montrer que $(D) \parallel (P)$
- 2 Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) , orthogonal à (P) et qui contient la droite (D) .

Exercice 28

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, le plan (P) d'équation cartésienne $x + y - z + 1 = 0$ et la droite (D) définie par :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- 1 Montrer que $(D) \parallel (P)$
- 2 Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) , orthogonal à (P) et qui contient la droite (D) .

Exercice 29

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(1; 2; -2)$, $B(1; -1; 1)$ et $C(2; 1; -2)$

- 1 a) Déterminer le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
b) Montrer que $x + y + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2 Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1; 1; 1)$ et de rayon $\frac{2}{\sqrt{3}}$
a) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) , puis déterminer le triplet de coordonnées du point de tangence de (ABC) et (S)

b Soit $M(a; b; c)$ un point du plan (ABC) . Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

Exercice 30/N2025

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; -4)$, $C(1; 4; 0)$ et la sphère (S) de diamètre $[AB]$.

- 1 a) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(0; 1; -1)$ et son rayon est $\sqrt{11}$.
b) En déduire que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 9 = 0$$

est une équation cartésienne de la sphère (S) et vérifier que C appartient à (S) .

- 2 Soit (P) le plan passant par le point C et tangent à la sphère (S) . Montrer que $\overrightarrow{\Omega C}$ est un vecteur normal au plan (P) , puis vérifier que

$$x + 3y + z - 13 = 0$$

est une équation cartésienne du plan (P) .

- 3 Soit (Δ) la droite passant par le point $D(3; 2; 0)$ et orthogonale au plan (P) .

a Calculer $d(\Omega; (\Delta))$ puis vérifier que (Δ) coupe la sphère (S) en deux points différents.

b Montrer que

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

c Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S) .

Exercice 31

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6 = 0$$

- 1 Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1; -1; 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$
- 2 Soit (P) le plan passant par $A(-1; 1; 0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$
- a** Vérifier que $x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P)
- b** Montrer que $d(\Omega; (P)) = \sqrt{6}$ puis en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de rayon $\sqrt{2}$
- 3 **a** Écrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (P)
- b** En déduire que $H(0; 1; -1)$ est le centre du cercle (C)
- 4 Calculer $\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{AH}$ puis en déduire l'aire du triangle $A\Omega H$

Exercice 32

On considère le point $S_2(-4; 0; 3)$ et le plan

$$(P) : 2x + y - z + 1 = 0$$

- 1 Calculer $d(S_2; (P))$
- 2 En déduire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre S_2 et tangente à (P)

Exercice 33

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 0, 2)$, $B(2, 0, 0)$ et la sphère (S) de centre O et de rayon $R = 2$.

1 -

- a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S) .
- b) Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S) .

2 - Soit I le milieu du segment $[AB]$.

- a) Déterminer l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S) .
- b) Vérifier que $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 0$ puis montrer que $d(O, (AB)) = \sqrt{2}$.

3 - On considère un point $M(0, m, 0)$ de l'espace, où $m \in \mathbb{R}$.

- a) Vérifier que

$$\vec{AB} \wedge \vec{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$$

- b) Déduire que

$$mx + 2y + mz - 2m = 0$$

est une équation cartésienne du plan (ABM) .

- c) Montrer que

$$d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$$

4 - Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r . Montrer que

$$r = \sqrt{2 + \frac{4}{2 + m^2}}$$

et déduire que

$$\sqrt{2} < r \leq 2 \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 34/ R2025

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 3, 3)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 1)$ et le vecteur $\vec{n}(1, -1, 1)$. Soit (P) le plan d'équation $x - y + z - 6 = 0$.

1 -

a) Montrer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$$

et déduire que les points A , B et C sont non alignés.

b) Montrer que les plans (ABC) et (P) sont parallèles.

2 - Soit (S) la sphère telle que : le plan (ABC) est tangent à (S) en A et le plan (P) est tangent à (S) en un point H .

a) Calculer la distance du point A au plan (P) et déduire que le rayon de la sphère (S) est $\sqrt{3}$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (P) .

c) Montrer que les coordonnées du point H sont $(2, 1, 5)$.

d) Montrer que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0$$

est une équation cartésienne de la sphère (S) .

3 - Déterminer les deux points d'intersection de la droite (BH) et la sphère (S) .