

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

a) $I_1 = \int_{-1}^1 (2x^3 - 5x^2 + 2) dx$

c) $I_3 = \int_0^1 (x\sqrt{x} - \sqrt[4]{x})dx$

e) $I_5 = \int_0^{-1} \frac{2}{3x+4} dx$

g) $I_7 = \int_0^1 2x(x^2 - 7)^7 dx$

i) $I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \cdot \sin^5 x dx$

k) $I_{11} = \int_e^{e^2} \frac{-3}{x \ln^2 x} dx$

m) $I_{13} = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x \ln x - x)^4} dx$

o) $I_{15} = \int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$

q) $I_{17} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+e^{-3x}}} dx$

s) $I_{19} = \int_0^1 \frac{1-e^{2x}}{e^x-2x} dx$

u) $I_{21} = \int_0^1 (1-x)e^{x^2-2x+3} dx$

w) $I_{23} = \int_1^2 \frac{x^2+5x+5}{x+3} dx$

b) $I_2 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx$

d) $I_4 = \int_1^4 \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - x^2 \right) dx$

f) $I_6 = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$

h) $I_8 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x dx$

j) $I_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -7 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) dx$

l) $I_{12} = \int_{-1}^0 (e^x - 4e^{2x}) dx$

n) $I_{14} = \int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^4} dx$

p) $I_{16} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5x+4}} dx$

r) $I_{18} = \int_{-1}^1 x \sqrt[3]{2+2x^2} dx$

t) $I_{20} = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

v) $I_{22} = \int_0^{\sqrt{2}} x e^{-3x^2+7} dx$

x) $I_{24} = \int_0^1 \frac{2x^2-5}{(x-2)(x+1)} dx$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes:

a) $I_1 = \int_{-1}^3 |x-2| dx$

c) $I_3 = \int_{-1}^2 |x^2-x| dx$

e) $I_5 = \int_{-2}^1 (|2x-1| + |x+1|) dx$

b) $I_2 = \int_0^{\pi} |\cos x| dx$

d) $I_4 = \int_{-2}^3 |-2x^2+2x+4| dx$

f) $I_6 = \int_{-1}^1 |e^{2x}-1| dx$

Exercice 3

- 1 Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}); \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

- 2 Calculer l'intégrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} dx$$

Exercice 4

- 1 Déterminer les réels a , b , c et d tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 4}{x^2 - x + 1} = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - x + 1}$$

- 2 Calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 4}{x^2 - x + 1} dx$$

Exercice 5

- 1 En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

a) $I_1 = \int_0^1 x e^x dx$

b) $I_2 = \int_0^{\frac{1}{3}} (4x - 1) e^{3x} dx$

c) $I_3 = \int_1^e \ln x dx$

d) $I_4 = \int_e^{e^2} x \ln x dx$

e) $I_5 = \int_{-1}^0 \ln(x + 3) dx$

f) $I_6 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

g) $I_7 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

h) $I_8 = \int_1^e \ln^2 x dx$

i) $I_9 = \int_0^{\ln 2} \frac{x + 1}{e^{2x}} dx$

j) $I_{10} = \int_1^e x^2 \ln x dx$

k) $I_{11} = \int_1^2 (2x + 3) \ln x dx$

l) $I_{12} = \int_0^1 (2x - 1) e^x dx$

m) $I_{13} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin(2x) dx$

n) $I_{14} = \int_0^{\pi} x \cos x dx$

o) $I_{15} = \int_{-1}^2 \ln(3x + 4) dx$

p) $I_{16} = \int_0^3 x \sqrt{x + 1} dx$

q) $I_{17} = \int_0^{\ln 3} e^{-x} \ln(1 + e^x) dx$

- 2 En utilisant une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a) $I_{18} = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

b) $I_{19} = \int_1^e x (\ln x)^2 dx$

c) $I_{20} = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

d) $I_{21} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

Exercice 6

- 1 a Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}$:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

- b Calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$$

- 2 En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = 3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$$

Exercice 7

- 1 a Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

- b Calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$$

- 2 En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1+e) - \frac{1}{2(1+e)^2}$$

Exercice 8

Comparer les intégrales I et J sans les calculer dans chacun des cas suivants :

1 $I = \int_1^2 xe^x dx$ et $J = \int_1^2 x^2 e^x dx$

2 $I = \int_{\frac{1}{e}}^1 x \ln x dx$ et $J = \int_1^{\frac{1}{e}} \ln x dx$

3 $I = \int_e^{e^2} e^{-x} \cdot \ln^2 x dx$ et $J = \int_e^{e^2} e^{-x} \ln x dx$

Exercice 9

Montrer que :

1 $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$

2 $1 \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} dx \leq 2$

$$3 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2 \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \ln 2$$

$$4 \quad 1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1 \quad (\text{Rappel : } \forall x \in [0, 1] : 0 \leq x^2 \leq x)$$

$$5 \quad 2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2 \ln 3 + 2 \ln 5$$

Exercice 10

1 a Montrer que :

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+), 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

b En déduire que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+), x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

2 Déterminer un encadrement de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

Exercice 11

On considère les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

1 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$$

a Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b En Déduire la valeur de l'intégrale I .

2 a Vérifier que: $J + 2I = K$.

b En utilisant une intégration par parties, Montrer que: $K = \sqrt{3} - J$.

c En déduire la valeur des intégrales J et K .

Exercice 12

● Session rattrapage 2010 :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$

- 1 Montrer, en utilisant une intégration par partie que :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{e}{2}$$

- 2 Montrer que l'aire du domaine plan limite par (C_f) , la droite $(D) : y = x - 1$ et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = e$ est: $\left(1 - \frac{1}{e}\right) cm^2$.

Exercice 13

• Session Normale 2013

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = (x - 2)^2 e^x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1 cm$

- 1 Montrer que $H : x \mapsto (x - 1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction : $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer :

$$\int_0^1 xe^x dx$$

- 2 Montrer, en utilisant une intégration par partie que :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$$

- 3 Montrer que l'aire du domaine plan limite par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 0$ et $x = 1$ est : $5(e - 2) cm^2$

Exercice 14

• Session Normale 2014

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1 cm$.

On considère les intégrales I et J définies par:

$$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx \quad ; \quad J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$$

- 1 Montrer que $H : x \mapsto x \ln x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto 1 + \ln x$ sur $]0; +\infty[$, puis en déduire que $I = e$.
- 2 En utilisant une intégration par parties, montrer que: $J = 2e - 1$
- 3 Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limite par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 15

• Session Normale 2018

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - x) e^{-x} + x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$

- 1 Montrer que $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2) e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que : $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e - 5}{e}$

- 2 En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e - 2}{e}$$

- 3 Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limite par (C_f) , la droite $(D) : y = x$ et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 16

• Session Normale 2018

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$.

- 1 Montrer que :

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

- 2 Montrer que $H : x \mapsto 2 \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur $]0, +\infty[$.

- 3 Montrer, en utilisant une intégration par partie que :

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x dx = e - 2$$

- 4 Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limite par (C_f) , la droite $(D) : y = x$ et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 17

• Session normale 2010

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

- 1 Montrer, en utilisant une intégration par partie que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$$

- 2 Montrer que l'aire du domaine plan limitée par (C_f) , la droite $(T) : y = x$ et les droites d'équations: $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est: $(6 - 2e)cm^2$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $]0; e[Ue; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$.

- 1 Montrer que :

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \ln 2$$

- 2 Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

Exercice 19

● Session Rattrapage 2017

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$

- 1 Montrer que $H : x \mapsto (x - 1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que:

$$\int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$$

- 2 En utilisant une intégration par parties, Montrer que :

$$\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3 \left(1 - \frac{2}{e} \right)$$

- 3 Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par (C_f) , la droite (D) d'équation $y = x + 1$ et les droites d'équations: $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 20

● Session Normale 2012

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 3cm$.

1 Montrer que $H : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

2 En utilisant une intégration par parties, Montrer que :

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$$

3 Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 21

• Session Normale 2017

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1cm$.

1 Montrer que:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

2 Montrer que $H : x \mapsto 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur $]0; +\infty[$.

3 En utilisant une intégration par parties, Montrer que:

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2$$

4 Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par (C_f) , la droite (D) d'équation $y = x$ et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 22

• Session Rattrapage 2014

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = (xe^x - 1)e^x$$

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1 En utilisant une intégration par parties, Montrer que:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$$

2 Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par (C_f) , L'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$

Exercice 23

- 1 a Vérifier que $H : x \mapsto \frac{e^{3x}}{3} - \frac{3}{2}e^{2x} + 3e^x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (e^x - 1)^3$ sur $\mathbb{R}$.
- b En déduire que :

$$\int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^3 dx = \frac{5}{6} - \ln 2$$

- 2 En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale:

$$I = \int_0^{\ln 2} 3xe^x (e^x - 1)^2 dx$$

Exercice 24

Le plan est rapport à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Dans chacun des cas suivants, calculer le volume du solide engendrée par la rotation de la courbe (C_f) un tour complet autour de l'axe des abscisses sur I .

- 1 $f(x) = \sqrt{x + 2e^{4x}}$ et $I = [0; 1]$
- 2 $f(x) = \sqrt{x^2 \ln x}$ et $I = [1; e]$
- 3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x \ln x}}$ et $I = [e; e^2]$
- 4 $f(x) = \sqrt{\sin x} \cdot \cos x$ et $I = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$