

|                        |              |                         |                  |
|------------------------|--------------|-------------------------|------------------|
| ◇◇ lycee el joulane ◇◇ |              |                         | A.S. : 2025/2026 |
| Matière: Mathématiques | Niveau :2BAC | Date: ...../...../..... | S1               |
| Les nombres complexes  |              |                         |                  |

## I. L'ensemble des nombres complexes

### 1 Définition :

Il existe un nombre imaginaire noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .

L'ensemble des nombres complexes est noté  $\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .

### 2 Forme algébrique :

Soit  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

- L'écriture  $z = a + ib$  s'appelle la forme algébrique du nombre complexe  $z$ .
- Le nombre  $a$  est la partie réelle de  $z$ , noté  $a = \text{Re}(z)$ .
- Le nombre  $b$  est la partie imaginaire de  $z$ , noté  $b = \text{Im}(z)$ .
- Si  $b = 0$  alors  $z$  est un nombre réel.
- Si  $a = 0$  alors  $z$  est un nombre imaginaire pur.

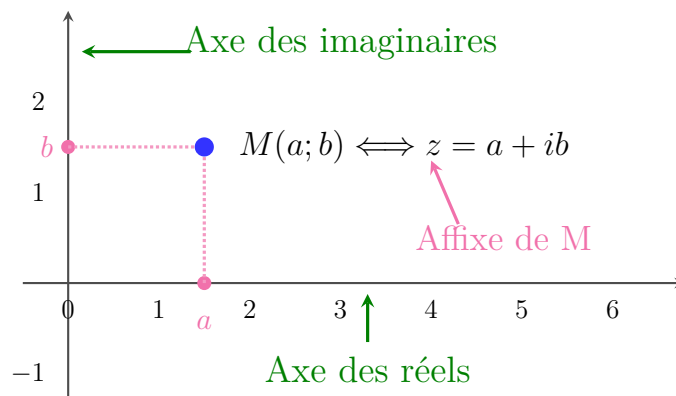
### 3 Représentation graphique :

Le plan  $(P)$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

On relie le nombre complexe  $z$  avec le point du plan  $M(a, b)$ .

- Le nombre complexe  $z$  s'appelle l'abscisse du point  $M$ .
- Le point  $M$  s'appelle l'image du nombre complexe  $z$  et on note  $M(z)$ .
- Le nombre  $z$  s'appelle l'abscisse du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .
- $\overrightarrow{OM}$  s'appelle l'image du nombre complexe  $z$ .



## II. Le conjugué d'un nombre complexe

### 1 Définition :

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Le conjugué du nombre complexe  $z$  est le nombre complexe noté  $\bar{z} = a - ib$ .

## 2 Propriétés :

|                                                                          |                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$                                 | $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ |
| $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$                       | $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$                               |
| $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$                                           | $\bar{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}$                             |
| $z \times \bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2$ | $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$                            |
| $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$                                  |                                                                   |

## III. Module d'un nombre complexe

### 1 Définition :

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Le module du nombre complexe  $z$  est le nombre réel positif noté  $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### 2 Propriétés :

|                   |                                                                  |
|-------------------|------------------------------------------------------------------|
| $ \bar{z}  =  z $ | $ z \times z'  =  z  \times  z' $                                |
| $ -z  =  z $      | $\left \frac{z}{z'}\right  = \frac{ z }{ z' } \quad (z' \neq 0)$ |
| $ z^n  =  z ^n$   |                                                                  |

## IV. Argument et forme trigonométrique

### 1 Définition de l'argument :

Soit  $z$  un nombre complexe et  $M$  son image.

L'argument du nombre complexe  $z$  est la mesure  $\theta$  en radian de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ , on le note  $\arg(z)$  et on écrit  $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ .

### 2 Forme trigonométrique :

On pose  $r = |z|$  et  $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ .

- La forme trigonométrique du nombre complexe  $z$  est  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ .
- Notation abrégée :  $z = [r, \theta]$ .

### 3 Propriétés :

| Opération      | Module                                         | Argument                                                        | Forme trigonométrique                         |
|----------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $z \times z'$  | $ z \times z'  =  z  \times  z' $              | $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$             | $[rr', \theta + \theta']$                     |
| $\frac{1}{z}$  | $\left \frac{1}{z}\right  = \frac{1}{ z }$     | $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$            | $\left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$           |
| $\frac{z}{z'}$ | $\left \frac{z}{z'}\right  = \frac{ z }{ z' }$ | $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$ | $\left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$ |
| $z^n$          | $ z^n  =  z ^n$                                | $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$                              | $[r^n, n\theta]$                              |
| $\bar{z}$      | $ \bar{z}  =  z $                              | $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$                           | $[r, -\theta]$                                |
| $-z$           | $ -z  =  z $                                   | $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$                           | $[r, \pi + \theta]$                           |

## V. Forme exponentielle

### 1 Définition et propriétés :

| Titre             | Contenu                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Définition        | Soit $z$ un nombre complexe de module $r$ et d'argument $\theta$ . L'écriture exponentielle de $z$ est $z = re^{i\theta}$ .                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Propriétés        | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}</math></li> <li><math>\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}</math></li> <li><math>\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}</math></li> <li><math>z^n = r^n e^{in\theta}</math></li> <li><math>\bar{z} = re^{-i\theta}</math></li> <li><math>-z = re^{i(\theta+\pi)}</math></li> </ul> |
| Formule de Moivre | Pour tout réel $\theta$ et tout entier relatif $n$ :<br>$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ou $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$                                                                                                                                                                                                                   |
| Formules d'Euler  | $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$                                                                                                                                                                                                                                                                     |

## VII. Interprétation géométrique

### 1 Notions de base :

| Notion géométrique                                             | Interprétation complexe                                  |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Point $A(x, y)$                                                | $z_A = x + iy$                                           |
| Vecteur $\overrightarrow{AB}$                                  | $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$                         |
| Milieu $I$ de $[AB]$                                           | $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$                              |
| Distance $AB$                                                  | $AB =  z_B - z_A $                                       |
| Distance $OM$                                                  | $OM =  z_M $                                             |
| Mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ | $\arg \left( \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$ |

### 2 Alignement, parallélisme et points cocycliques :

| Propriété                     | Condition                                                                       |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $A, B, C$ sont alignés        | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$                                    |
| $(AB) \parallel (CD)$         | $\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$                                    |
| $A, B, C, D$ sont cocycliques | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_D - z_B}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$ |
| $ABCD$ est un parallélogramme | $z_B - z_A = z_C - z_D$                                                         |

### 3 Lieux géométriques :

| Lieu                                      | Équation                |
|-------------------------------------------|-------------------------|
| Cercle de centre $\Omega$ et de rayon $r$ | $ z - \omega  = r$      |
| Médiatrice de $[AB]$                      | $ z - z_A  =  z - z_B $ |

### 4 Triangles particuliers :

| Type de triangle                     | Forme trigonométrique                                             | Forme complexe                                          |
|--------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Triangle isocèle en $A$              | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1, \theta]$                       | $\left  \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right  = 1$        |
| Triangle équilatéral                 | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm \frac{\pi}{3}\right]$ | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i \frac{\pi}{3}}$ |
| Triangle rectangle en $A$            | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r, \pm \frac{\pi}{2}\right]$ | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$           |
| Triangle rectangle et isocèle en $A$ | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm \frac{\pi}{2}\right]$ | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$                   |

### 5 Quadrilatères particuliers :

| Type             | Forme trigonométrique                                             | Forme complexe                                                              |
|------------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $ABCD$ losange   | $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = [1, \theta]$                       | $ z_B - z_A  =  z_D - z_A $<br>et $z_B - z_A = z_C - z_D$                   |
| $ABCD$ rectangle | $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \left[r, \pm \frac{\pi}{2}\right]$ | $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ et<br>$z_B - z_A = z_C - z_D$ |
| $ABCD$ carré     | $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm \frac{\pi}{2}\right]$ | $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$ et<br>$z_B - z_A = z_C - z_D$         |

### 6 Transformations du plan :

| Transformation                   | Expression complexe                                               |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Translation de vecteur $\vec{u}$ | $T(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$                  |
| Homothétie $h(\Omega, k)$        | $h(M) = M' \Leftrightarrow z' = k(z - \omega) + \omega$           |
| Rotation $R(\Omega, \theta)$     | $R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ |

### Exercice 1

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$a) z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}$$

$$b) z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$$

$$c) z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

$$d) z_4 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}}$$

$$e) z_5 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

$$f) z_6 = \frac{2i}{1-2i} + \frac{(1+i)^2}{i}$$

$$g) z_7 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$h) z_8 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}$$

$$i) z_9 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

### Exercice 2

Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $z \neq 0$ . On pose  $Z = \frac{z-2i}{z-1}$  avec  $z = x+iy$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

- 1 Déterminer  $\mathcal{R}[R(Z)]$  et  $\mathcal{I}\Im(Z)$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
- 2 Déterminer l'ensemble  $(D)$  des points  $M(z)$  tels que  $Z$  est un réel.
- 3 Déterminer l'ensemble  $(C)$  des points  $M(z)$  tels que  $Z$  est un imaginaire pur.

### Exercice 3

Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  dans le plan complexe dans les cas suivants:

$$a) \frac{1-z}{1-iz} \in \mathbb{R}$$

$$b) |z+1+i| = 2$$

$$c) (z-i)(z+1) \in i\mathbb{R}$$

$$d) |z-2i| = |z+i|$$

$$e) z + \bar{z} = |z|$$

$$f) \left| \frac{z-2i}{z+i} \right| = 2$$

$$g) \frac{z-2i}{z+1} \in i\mathbb{R}_+^*$$

$$h) |(1+i)z-2i| = 2$$

$$i) |z-1-i| \leq 3$$

### Exercice 4

Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres suivants:

$$a) z_1 = 1+i\sqrt{3}$$

$$b) z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$$

$$c) z_5 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$$

$$d) z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$e) z_4 = (1-i)(-\sqrt{3}+i)$$

$$f) z_6 = (1+i)^5$$

### Exercice 5

Soit  $\theta \in ]-\pi; \pi]$ . Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$a) z = \sin \theta + i \cos \theta$$

$$b) z = -\sin \theta - i \cos \theta$$

$$c) z = -\cos \theta + i \sin \theta$$

$$d) z = -\cos \theta - i \sin \theta$$

$$e) z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$$

$$f) z = 1 - \sin \theta - i \cos \theta$$

$$g) z = \frac{1 - \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta}$$

$$h) z = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$$

### Exercice 6

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes:

a)  $(2 - i)z + i = 0$       b)  $\frac{z+1}{z-1} = 2i$       c)  $z^2 + z\bar{z} = 0$       d)  $z + 2\bar{z} = 6 + i$

e)  $z = (1+i)\bar{z} + 3 - 2i$       f)  $z + \frac{1}{z} = 1$       g)  $\begin{cases} z + \bar{z} = i \\ 2z - \bar{z} = 1 + i \end{cases}$       h)  $\begin{cases} 2z - iz' = 1 + i \\ 4z + z' = 1 \end{cases}$

### Exercice 7

On pose  $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

- 1 Calculer le module et l'argument de  $1+i$  et  $\sqrt{3}-i$ .
- 2 Écrire  $Z$  sous forme algébrique et trigonométrique.
- 3 Dédire  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ .

On pose  $z_1 = 1 - i$  et  $z_2 = 1 + \sqrt{2} + i$

- 1 Déterminer la forme polaire de  $z_1$ .
- 2 a Montrer que:  $z_1 z_2 = \sqrt{2} z_2$   
b Dédire que  $\arg(z_1) + 2\arg(z_2) \equiv 0[2\pi]$ , puis donner l'argument de  $z_2$ .

### Exercice 8

- 1 Soit  $z_1$  et  $z_2$  de  $\mathbb{C}^*$ . Démontrer que :  $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$
- 2 Soit  $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$ . Démontrer que :  $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$

### Exercice 9

On pose  $f(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$  avec  $z = [1, \alpha]$  et  $\alpha \in ]0, \pi[$ .

- 1 a Montrer que  $\overline{f(z)} = \frac{z+1}{(z-1)^2}$   
b Peut-on dire que  $f(z) \in \mathbb{R}^*$  ?
- 2 On suppose que  $z \neq 1$ , où  $z = [1, \alpha]$  et  $\alpha \in ]0, \pi[$ .  
a Déterminer le module et l'argument de  $z+1$  et  $z-1$ .  
b Dédire le module et l'argument de  $f(z)$ .

### Exercice 10

On pose  $(\forall z \in \mathbb{C}), p(z) = \frac{5z}{z^2 + 1}$  tels que  $z \neq i$  et  $z \neq -i$ .

- 1 Montrer que :  $p(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$
- 2 Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  pour lequel  $p(z) \in \mathbb{R}$

### Exercice 11

I. On considère, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation suivante  $(E) : 8z^3 + 1 = 0$

- 1 Montrer que l'équation  $(E)$  équivaut à  $(2z + 1)(4z^2 - 2z + 1) = 0$ .
- 2 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ .

II. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}; \vec{v})$ , les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :

$$a = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}; \quad b = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}; \quad c = -\frac{1}{2}$$

- 1
  - a Écrire le nombre  $a$  sous forme exponentielle.
  - b Vérifier que:  $a^2 = b$ .
  - c En déduire que:  $\arg(b) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ .
- 2
  - a Montrer que:  $\frac{b-a}{b} = i\sqrt{3}$ .
  - b En déduire que le triangle  $OAB$  est rectangle en  $B$ .
- 3 Soit  $z$  l'affixe d'un point  $M$  et  $z'$  l'affixe du point  $M'$  l'image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .
  - a Montrer que:  $z' = ze^{i\frac{2\pi}{3}}$ .
  - b Montrer que point  $C$  est l'image de  $A$  par la rotation  $R$ .
  - c Montrer que le point  $B$  est le milieu du segment  $[AC]$ .

### Exercice 12

I. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation suivante :  $\frac{1}{2}z^2 - z + 2 = 0$ .

II. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}; \vec{v})$ , les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $a = 4, b = 1 - i\sqrt{3}$  et  $c = \bar{b}$

- 1 Écrire chacun des nombres  $b$  et  $c$  sous forme trigonométrique.
- 2 Montrer que:  $\frac{b-c}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ .
- 3 En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
- 4 Soit  $z$  l'affixe d'un point  $M$  et  $z'$  l'affixe du point  $M'$  l'image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $A$  et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ .

a Montrer que:  $z' = 4 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 4)$ .

b Montrer que le point  $D$  d'affixe  $d = 4 + i2\sqrt{3}$  est l'image de  $C$  par la rotation  $R$ .

c Montrer que  $ABCD$  est un losange.

5 On considère la translation  $T$  de vecteur  $\vec{u}$  et le point  $E$  l'image de  $C$  par  $T$

a Montrer que l'affixe de  $E$  est  $\frac{d}{2}$ .

b Que peut-on dire des point  $O, D$  et  $E$ .

### Exercice 13

1 Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation suivante :  $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$ .

2 On pose  $a = 2(\sqrt{3} + i)$ ,  $b = 1 + i$  et  $c = 2\sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$ .

a Écrire chacun des nombres  $a$  et  $\frac{b}{c}$  sous forme exponentielle.

b En déduire que  $a^{15}$  est un nombre imaginaire pur.

c Montrer que:  $\frac{ab}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

d Écrire le nombre  $\frac{ab}{c}$  sous forme algébrique.

e En déduire que :  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}; \vec{v})$ , on considère la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{12}$  et les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives :  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$ .

a Déterminer l'affixe du point  $P$  l'image de  $B$  par la rotation  $R$ .

b Montrer que les points  $O, A, P$  sont alignés et que  $OA = \sqrt{8}OP$ .

### Exercice 14

1 Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation suivante:  $z^2 - 2z + 4 = 0$ .

2 On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $a = 4$ ,  $b = 1 - i\sqrt{3}$  et  $c = \bar{b}$ .

a Écrire chacun des nombres  $b$  et  $c$  sous forme trigonométrique.

b Montrer que  $\frac{b - c}{c - a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

c Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral.