

2BAC PC BIOF

Exercice 1

Écrire les nombres complexes sous forme algébrique.

$$z_1 = (4 + i) - 3i(2 - i) \quad ; \quad z_2 = (2 - 5i)(5 + 3i) \quad ; \quad z_3 = \frac{2i}{1 + 3i} \quad ; \quad z_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^2$$

Exercice 2

- 1 Montrer que :

$$1 + i + i^2 + i^3 = 0 \quad ; \quad (1 + i)^2 = 2i \quad ; \quad (1 + i)^6 = -8i$$

- 2 On pose $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que $j^2 = \bar{j}$; $j^3 = 1$ et vérifier que $1 + j + j^2 = 0$

- 3 On considère les points $A(1)$; $B(j)$ et $C(j^2)$, montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3

On pose $z_1 = 2i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \sqrt{2}(1 + i)$

- 1 Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

- 2 En déduire $z_1^{12} = z_2^{12}$

- 3 Écrire $\frac{z_3}{z_2}$ sous forme trigonométrique et algébrique en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

- 4 Soit A , B et C trois points d'affixe respectifs z_1 , z_2 et z_3 . Montrer que O le centre du repère est un centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

- 5 Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$

Exercice 4

on considère les points $A(\sqrt{3} - i)$, $B(\sqrt{3} + i)$, $C(\sqrt{3} + 3i)$ et $D(-\sqrt{3} + i)$.

- 1 calculer $\frac{a - b}{c - b}$ en déduire que les points A ; B et C sont alignés.

- 2 calculer $\frac{d - c}{b - o}$ en déduire que les droites (OB) et (DC) sont parallèles

- 3 calculer $\frac{d - b}{a - c}$ en déduire que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires

- 4 montrer que $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ en déduire que le triangle OAB est équilatéral.

- 5 Montrer que $\frac{c}{c - a} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ en déduire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO})$

Exercice 5

- 1 résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante $z^2 - 12z + 61 = 0$
- 2 On considère les points A, B et C les points d affixe respectives $a = 6 - 5i, b = 4 - 2i$ et $c = 2 + i$.
- 3 Calculer $\frac{a - c}{b - c}$ en déduire que les points A, B et C sont alignés.
- 4 On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 5i$
 - a Déterminer l'écriture complexe de la translation T .
 - b Vérifier que le point D image du point C par la translation T est $d = 3 + 6i$.
 - c Montrer que $\frac{d - c}{b - c} = -1 + i$ en déduire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$

Exercice 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et D les points d affixe respectives $a = 2 + 3i, b = 2 - 3i$ et $d = 1$

- 1
 - a montrer que $DA = DB$
 - b soit c l'affixe du point C image du point A par la translation T de vecteur $\vec{u}(-4 - 2i)$, vérifier que $c = -2 + i$
 - c Montrer que $\frac{c - d}{a - d} = i$ en déduire que le triangle ACD est un triangle rectangle isocèle.
- 2 on considère la rotation R de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
 - a Montrer que $R(C) = A$
 - b On pose $R(B) = E$ montrer que $z_E = \bar{c}$.
 - c Montrer que les points A, B, C et E appartiennent au cercle de centre D
- 3 montrer que la droite (AE) est perpendiculaire à (BC) .

Exercice 7

- 1 résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante $z^2 - 2z + 2 = 0$
- 2 on considère les points K, L et M d'affixe $z_k = 1 + i$, $z_l = 1 - i$ et $z_m = -i\sqrt{3}$
 - a soit N le symétrique du point M par rapport à L . vérifier que $z_N = 2 - i(\sqrt{3} - 2)$
 - b on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en A et N en C .
Déterminer les affixes z_A et z_C
 - c On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ et transforme M en D et N en B , déterminer z_D et z_B .
 - d Montrer que k est le milieu des segments $[BD]$ et $[AC]$
 - e Montrer que $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}$
 - f En déduire que $ABCD$ est un carré

Exercice 8

- 1 résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante $z^2 - 3z + 3 = 0$
- 2 on pose $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. écrire a sous forme trigonométrique.
- 3 On pose $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et vérifier que $b^2 = i$
- 4 On pose $h = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ vérifier que $h^4 + 1 = a$
- 5 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et le point B d'affixe b
 - a Soit le point C image de B par la rotation R montrer que $c = ib$
 - b En déduire la nature du triangle OBC .

Exercice 9

on considère les points les points A, B, S et Ω d'affixes respectives $a = -2 + 4i$, $b = -4 + 2i$, $s = -5 + 5i$ et $\omega = -2 + 2i$.

Soit l'homothétie de centre S et de rapport $k = 3$. on appelle C image du point A par h et D l'image du point B par h .

- 1 Déterminer l'écriture complexe de h .
- 2 Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4 + 2i$ et le point D a pour affixe $d = -2 - 4i$
- 3 Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- 4 Démontrer que la droite $(S\Omega)$ est la médiatrice du segment $[AB]$
- 5 Soit P le point milieu du segment $[AC]$
 - a Déterminer l'affixe p du point P .
 - b Démontrer que $\frac{\omega - p}{d - b} = \frac{1}{2}i$ en déduire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{P\Omega})$.

Exercice 10

- 1 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

- a Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$
- b En déduire les solutions de l'équation (E) .
- 2 Soient les nombres complexes $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
 - a Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$
 - b Écrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique
 - c En déduire que $a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
- 3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$.

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

- a Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$
- b Déterminer l'image du point C par la rotation R
- c Déterminer la nature du triangle OBC .
- d Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O , B et D sont alignés

Exercice 11

On considère l'équation $(E) : z^2 - 2(\sqrt{3} + 1)z + 8 = 0$.

- 1 Montrer que $\Delta = [(2\sqrt{3} - 2)i]^2$.
- 2 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- 3 On pose $a = \sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)i$ et $b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 - a Calculer $|a|$ et $\arg b$.
 - b Vérifier que $i \cdot \bar{a} = ab$
 - c En déduire $\arg a \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$.
 - d Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 12

- 1
 - a Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation: $(z - 1 - i)(z^2 + 2z + 10) = 0$
 - b on pose $a = 1 + i$, écrire a sous la forme trigonométrique
 - c en déduire que $a^{16} - 256 = 0$
- 2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B et C d'affixes respectives : $a = 1 + i$ et $b = -1 + 3i$ et $c = -3 + i$
 - a montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
 - b en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B
- 3 montrer que $(-1 + 3i)(-3 + i) = -10i$ puis en déduire que $OB \times OC = 10$
- 4 soit le point D tel que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et le point P le milieu du segment $[BC]$
 - a montrer que l'affixe du point D est $d = -1 - i$
 - b montrer que l'affixe du point P est $p = -2 + 2i$
 - c soit le point H d'affixe $h = -5i$, montrer que $\frac{p - a}{d - h} = -\frac{1}{2}i$
 - d en déduire que les droites (AP) et (DH) sont perpendiculaires et que $DH = 2AP$

Exercice 13

on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + 3i, b = \bar{a}$ et $C = 2 - 3\sqrt{3}$

- 1 résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante $z^2 - 4z + 13 = 0$.
- 2 Montrer que : $\left(\frac{a-c}{6}\right)^3 = i$ et $\left(\frac{a-c}{6}\right)^{12} = 1$
- 3 déterminer la forme algébrique et trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-c}{b-c}$.
- 4 En déduire une mesure de l'angle de la rotation R de centre C qui transforme A en B .
- 5 Écrire l'expression de l'homothétie h de centre $\Omega(2 + 4i)$ de rapport 7.
- 6 Déterminer l'affixe du point D image dont l'image est le point A

Exercice 14

I- On considère le nombre complexe a tel que : $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

- 1 Montrer que le module du nombre complexe a est $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.
- 2 Vérifier que $a = 2\left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$.
- 3 a En linéarisant $\cos^2 \theta$, θ est un nombre réel, montrer que :

$$1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$$

b Montrer que $a = 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 4i \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$. (on rappelle que $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$)

c Montrer que $4 \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a puis montrer que $a^4 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^4 i$.

II- On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que : $\omega = \sqrt{2}$ et $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1 Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est $2i$.
- 2 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 2i| = 2$.

Exercice 15

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives

$$a = 1 + 2i, \quad b = \bar{a}, \quad c = \frac{3(3+i)}{2}, \quad d = \frac{3(1+i)}{2}, \quad \omega = \frac{5}{2}.$$

- 1 a Vérifier que $a + b = 2$ et déduire que l'affixe du point P , milieu du segment $[AB]$, est $p = 1$.
- b Montrer que a et b sont les solutions de l'équation :

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

- 2 a Vérifier que $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$.
 b Déduire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

- 3 a Vérifier que

$$\frac{d - c}{a - b} = \frac{3}{4}i.$$

- b Montrer que

$$d - b = (c - a)e^{i\frac{\pi}{2}}$$

puis déduire que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires.

- 4 Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' . On pose $h(P) = G$.

- a Vérifier que

$$z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

- b Montrer que l'affixe du point G est

$$g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i.$$

- 5 Montrer que les points Ω , G et D sont alignés.

Exercice 16

I) On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^2 - 4z + 9 = 0$$

- 1 Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = (2i\sqrt{5})^2$$

- 2 Résoudre l'équation (E) .

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives

$$a = 2 + i\sqrt{5}, \quad b = 2 - i\sqrt{5}, \quad c = 2 - \sqrt{5}.$$

- 1 a Vérifier que $|a| = 3$.
 b Montrer que le triangle OAB est isocèle.

- 2 a Vérifier que

$$\frac{a - c}{b - c} = i.$$

- b Déduire la nature du triangle ABC .

- 3 a Déterminer l'affixe du point D image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

- b Montrer que $ADBC$ est un carré.

- 4 On pose

$$x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{1 - x_n},$$

avec n un entier naturel non nul.

- a Vérifier que $x_n \overline{x_n} = 1$.
- b Montrer que $y_n + \overline{y_n} = 1$ puis déduire la partie réelle de y_n .

Exercice 17

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2} + i$, $c = \bar{b}$ et $d = 2i$.

- 1 **Écrire** le nombre complexe a sous forme trigonométrique.
- 2 a **Vérifier** que $b - d = c$.
b **Montrer** que $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés.
- 3 a **Vérifier** que $ac = 2b$.
b En déduire que $2 \arg(b) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
- 4 Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' .
a **Montrer** que $z' = \frac{1}{2}az$.
b En déduire que $R(C) = B$ et que $R(A) = D$.
c **Montrer** que $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduire une mesure de l'angle $(\vec{AC}, \vec{AB})$.

Exercice 18

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \quad b = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad c = 1 + a, \quad d = \bar{c}$$

- 1 Vérifier que $|a| = 1$ et que $\arg(a) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$.
- 2 Vérifier que
$$\frac{c-d}{c-a} = i$$
et déduire que le triangle ACD est isocèle rectangle en C .
- 3 a **Montrer** que
$$d - a = 1 - i$$
et que
$$b - d = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i).$$
b **Déduire** que les points A, D et B sont alignés.

- 4 Soit R la transformation du plan qui transforme chaque point M d'affixe z en M' d'affixe z' tel que
$$z' = az$$

- 5 Vérifier que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
- 6 Vérifier que $ad = c$ et déduire que $R(D) = C$.
- 7 Montrer que

$$\arg(c) = \frac{5\pi}{12} [2\pi].$$

Exercice 19

- 1 On considère le nombre complexe

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

- a Montrer que

$$a = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

- b Déduire que a^{2022} est un nombre réel.

- 2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et $\bar{a}$.

Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A .

- 3 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) :

$$z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$$

où α est un nombre réel non nul.

On suppose que l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées non réelles z et $\bar{z}$. Soient les points $M(z)$, $N(\bar{z})$ et $P(\sqrt{3})$ du plan complexe.

Sans résoudre l'équation (E_α) :

- a Justifier que $\alpha > \frac{3}{4}$ et que $\alpha = z\bar{z}$.

- b Montrer que

$$|z| = |z - \sqrt{3}|.$$

- c En déduire que les points M et N appartiennent à la médiatrice (Δ) du segment $[OP]$.

- d Déterminer la valeur de α pour laquelle

$$|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

et déduire dans ce cas, les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$.