

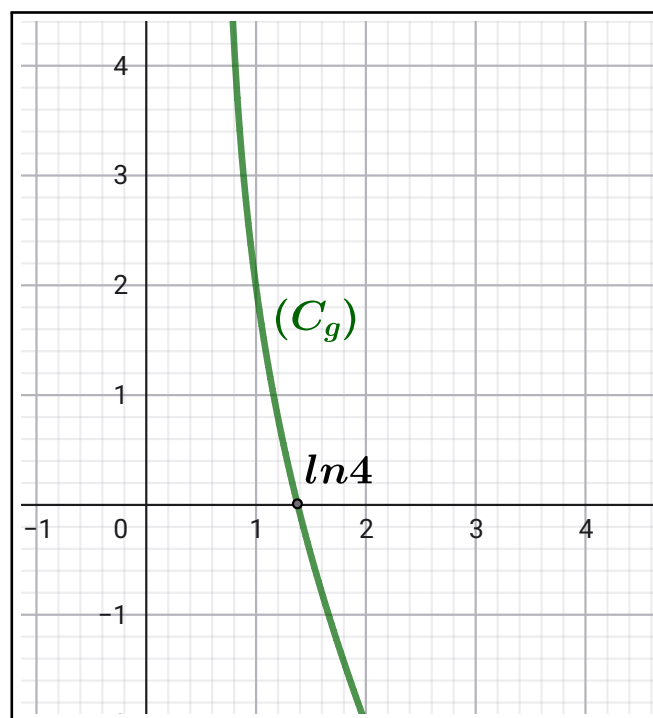
Série 6 : FONCTIONS LOGARITHMES

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 2\ln\left(\frac{e^x}{2} - 1\right)$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$.

- 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{e^x}{2} > 1$, puis en déduire que $D_f =]\ln 2, +\infty[$.
- 2
 - a Montrer que : $(\forall x > \ln 2); f(x) = -x - 2\ln\left(\frac{1}{2} - e^{-x}\right)$ puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
 - b Montrer que : $(\forall x > \ln 2); f(x) - (-x + 2\ln 2) = -2\ln(1 - 2e^{-x})$.
 - c Montrer que la droite $(\Delta) : y = -x + 2\ln 2$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
 - d Montrer que (C_f) est au dessus de (Δ) sur D_f .
- 3 Montrer que $\lim_{x \rightarrow +(\ln 2)^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter ce résultat géométriquement.
- 4
 - a Montrer que : $(\forall x > \ln 2); f'(x) = \frac{2 + e^x}{2 - e^x}$.
 - b Déduire que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]\ln 2, +\infty[$.
 - c Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\ln 2, +\infty[$, puis vérifier que : $\ln 7 < \alpha < \ln 8$.
- 5
 - a Montrer que : $(\forall x > \ln 2); f''(x) = \frac{4e^x}{(2 - e^x)^2}$.
 - b Déduire la concavité de (C_f) sur D_f .
- 6 La courbe (C_g) ci-dessous est la représentation graphique la fonction g définie sur l'intervalle $]\ln 2, +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.



- a Déterminer le signe de $g(x)$ pour tout x de $]ln2, +\infty[$.
- b Dédire que : $(\forall x \in]ln2, ln4[); f(x) \geq x$ et $(\forall x \in [ln4, +\infty[); f(x) \leq x$.
- 7 Tracer la courbe (C_f) .
(On donne : $ln2 \simeq 0,7; ln7 \simeq 1,9$).
- 8 a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- b Vérifier que f^{-1} est dérivable en 0 et que $(f^{-1})'(0) = \frac{2 - e^\alpha}{2 + e^\alpha}$.
- c Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.
- 9 On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \beta \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$
 où $\beta \in]ln4, +\infty[$.
 - a Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); ln4 \leq u_n \leq \beta$.
(On admet que $f([ln4, \beta]) \subset [ln4, \beta]$).
 - b Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
 - c Dédire que la suite $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2

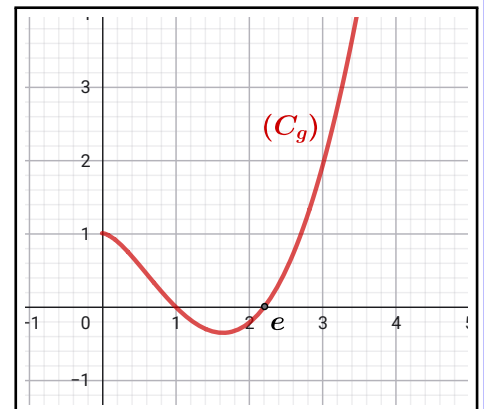
On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$.
Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$.

Partie I

- 1 Montrer que : $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$.
- 2
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ puis interpréter géométriquement ces résultats.
 - b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis donner une interprétation graphique à ce résultat.
 - c Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
- 3
 - a Montrer que pour tout x de D_f , $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$.
 - b Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et quelle est croissante sur $[1, e[$ et sur $]e, +\infty[$.
 - c Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D_f .

Partie II

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.
On désigne par (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (Voir la figure ci-contre).



- 1
 - a Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation $g(x) = 0$ dans $]0, +\infty[$.
 - b Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$.
 - c Montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ coupe la courbe (C_f) en deux points d'abscisses 1 et e .
 - d à partir de la courbe (C_g) , déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1, e]$, puis montrer que pour tout x de $[1, e]$, $f(x) \leq x$.
- 2 Construire dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C_f) et la droite (Δ) .

3 a Montrer que : $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) dx = \ln 2$.

(Remarquer que : $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$).

b Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

Partie III

On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; \quad n \in \mathbb{N}$$

- 1 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq u_n \leq e$.
- 2 Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
- 3 En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

*** Les démonstrations ne sont pas vraiment là pour vous convaincre que quelque chose est vrai – elles sont là pour vous montrer pourquoi c'est vrai ***

Andrew Mattei Gleason (1921-2008)