

Série 3 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Dans tous les exercices de cette série, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 1

- 1 On considère dans l'espace les points $A(1, 1, 0)$, $B(2, 3, 4)$ et $C(-1, 0, 3)$.
 - a Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 10\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$.
 - b Dédurre que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - c Calculer la surface du triangle ABC.
 - d Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 2 On considère dans l'espace les points $E(1, 1, -2)$, $F(0, 1, 0)$, $G(-1, 2, 3)$ et $H(4, 3, -6)$.
Montrer que les points E, F, G et H sont coplanaires.
- 3 Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) passant par le point A et de centre Ω dans les cas suivants :
 - a $A(3, 5, 2)$ et $\Omega(-1, 4, 5)$.
 - b $A(0, -1, 1)$ et $\Omega(1, -2, 1)$.
- 4 Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[AB]$ dans les cas suivants :
 - a $A(-1, 0, 3)$ et $B(2, 5, -4)$.
 - b $A(1, 2, 5)$ et $B(-3, 1, 0)$.

Exercice 2

Dans l'espace, on considère le point $A(1, -1, 3)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $x - y + 3z = 0$.

- 1 a Montrer que $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (OA) .
- b Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$ perpendiculaire

à la droite (OA) en A .

c Vérifier que le plan (P) est parallèle au plan (Q) .

2 Soit (S) la sphère tangente au plan (Q) au point A et qui est coupée par le plan (P) suivant un cercle (C) de rayon $\sqrt{33}$.

a Montrer que le centre $\Omega(a, b, c)$ de la sphère (S) appartient à la droite (OA) puis déduire que $b = -a$ et $c = 3a$.

b Montrer que $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$.

c Déduire les coordonnées de Ω et montrer que le rayon de la sphère (S) est égal à $2\sqrt{11}$.

Exercice 3

Dans l'espace, on considère les points $A(1, 2, 7)$, $B(2, 0, 2)$, $C(3, 1, 3)$, $D(3, -6, 1)$ et $E(4, -8, -4)$.

1 Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2 Soit $\vec{u}(1, b, c)$ un vecteur de l'espace où b et c désignent des réels.

a Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC) .

b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.

c Le point D appartient-il à au plan (ABC) ?

3 Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 4t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a La droite (D) est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

b Déterminer le triplet des coordonnées du point H l'intersection de la droite (D) et du plan (ABC) .

4 Etudier la position de (DE) par rapport au plan (ABC) .

Exercice 4

Dans l'espace, on considère les points $A(5, -5, 2)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(0, 1, 2)$ et $D(6, 6, -1)$.

1 Quelle est la nature du triangle (BCD) ? et calculer sa surface.

2 a Montrer que $\vec{n}(-2, 3, 1)$ est un vecteur normal au plan (BCD) .

b Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD) .

- 3 Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point A et orthogonale au plan (BCD) .
- 4 Déterminer le triplet des coordonnées du point H l'intersection de la droite $(\mathcal{D})$ et du plan (BCD) .
- 5 Déterminer le volume du tétraèdre $(ABCD)$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :
 $V = B \times h$ où B est la surface d'une base du tétraèdre et h sa hauteur correspondante .

- 6 On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.
 Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 5

Dans l'espace , on considère les points $A(2, 1, 0)$ et $B(-4, 1, 0)$.

- 1 Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par le point A et dont un vecteur normal est $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
 Montrer que : $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$.
- 2 Soit $(\mathcal{S})$ l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient la relation :
 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
 Montrer que $(\mathcal{S})$ est une sphère de centre $\Omega(-1, 1, 0)$ et de rayon 3.
- 3 a Calculer la distance du point Ω au plan $(\mathcal{P})$, et en déduire que $(\mathcal{P})$ coupe la sphère $(\mathcal{S})$ suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on déterminera le rayon.
 b Montrer que le centre du cercle $(\mathcal{C})$ est le point $H(0, 2, -1)$.
- 4 Montrer que $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$, et en déduire la surface du triangle OHB .

Exercice 6

- 1 Soit $(\mathcal{S})$ la sphère de centre $\Omega(1, -3, 2)$ et de rayon $R = 3$.
 Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})$.
- 2 Soit (Δ) la droite définie par :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad .$$

- a Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère en deux points I et J tels que l'abscisse de I est négative.
 - b Vérifier que $[IJ]$ est un diamètre de la sphère (S) .
- 3 On considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ et $C(2, 1, -1)$.
 - a Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
 - b Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 4
 - a Calculer $d(\Omega, (ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC) .
 - b Vérifier que $(\Delta) \perp (ABC)$.
- 5 Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection du plan (ABC) et la sphère (S) .

" Une once d'action vaut mieux qu'une tonne de théorie ".

Ralph Waldo Emerson

