

□□□□□□ **Sujet 10** □□□□□□

**Exercice 1**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, 2, -2)$ ,  $B(1, -1, 1)$  et  $C(2, 1, -2)$ .

- 1/ a) Déterminer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .  
 b) Montrer que  $x+y+z-1=0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
- 2/ Soit  $(S)$  la sphère de centre le point  $\Omega(1, 1, 1)$  et de rayon  $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .  
 a) Montrer que le plan  $(ABC)$  est tangent à la sphère  $(S)$ , puis déterminer les coordonnées du point  $H$ , le point de tangence de  $(ABC)$  et  $(S)$ .  
 b) Soit  $M(a, b, c)$  un point du plan  $(ABC)$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des réels.  
 Montrer que  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ .

**Exercice 2**

1/ On considère l'équation de la variable complexe  $z$  :

$$(E) : z^3 - (4 - i)z^2 + (5 - 4i)z + 5i = 0$$

- a) Montrer que l'équation  $(E)$  admet une solution imaginaire pure  $z_0$  que l'on déterminera.
  - b) Montrer que :  $z^3 - (4 - i)z^2 + (5 - 4i)z + 5i = (z - z_0)(z^2 - 4z + 5)$ .
  - c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ .
- 2/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C, D$  et  $\Omega$  d'affixes respectives  $a = 2 + i, b = 2 - i, c = i, d = -i$  et  $\omega = 1$ .
- a) Montrer que :  $\frac{a - \omega}{b - \omega} = i$ .
  - b) En déduire que le triangle  $\Omega AB$  est rectangle et isocèle en  $\Omega$ .
- 3/ Soit  $z$  l'affixe du point  $M$  du plan complexe et soit  $z'$  l'affixe du point  $M'$  image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
- a) Montrer que  $z' = iz + 1 - i$ .
  - b) Montrer que :  $R(A) = C$  et  $R(D) = B$ .
  - c) Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre.

### Exercice 3

Une urne  $U_1$  contient deux boules portant le numéro 1 et quatre boules portant le numéro 2.

Une urne  $U_2$  contient trois boules **rouges** et quatre boules **vertes**.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard **une boule** de l'urne  $U_1$ .

1/ Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « La boule tirée porte le numéro 1 »

B : « La boule tirée porte le numéro 2 »

2/ On considère dans cette question l'épreuve aléatoire suivante :

On tire au hasard une boule de l'urne  $U_1$  et on note son numéro :

— Si ce numéro est 1, on tire une boule de l'urne  $U_2$

— Si ce numéro est 2, on tire simultanément deux boules de l'urne  $U_2$ .

Soit  $n$  le nombre de boules rouges tirées de l'urne  $U_2$ , on note  $E_n$

l'événement : « Obtenir exactement  $n$  boules rouges » .

a) Montrer que  $p(E_1) = \frac{11}{21}$  et  $p(E_2) = \frac{2}{21}$ .

b) Calculer la probabilité de l'événement A sachant que l'événement  $E_1$  est réalisé.

### Problème

#### Partie I

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = x - 2 \ln x$

1/ a) Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ .

b) Montrer que la fonction  $g$  est décroissante sur  $]0, 2]$  et qu'elle est croissante sur  $[2, +\infty[$ .

2/ En déduire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ .

#### Partie II

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x - (\ln x)^2$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , et interpréter graphiquement ce résultat.

2/ a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ . (On peut poser  $t = \sqrt{x}$ , on rappelle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0)$$

- b) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ . (remarquer que  $f(x) = x \left( 1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right)$ )
- c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ , et en déduire que la courbe  $(\mathcal{C})$  admet une branche parabolique au voisinage de  $+\infty$  de direction asymptotique la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$ .
- d) Montrer que la courbe  $(\mathcal{C})$  est en dessous de la droite  $(\Delta)$ .
- 3/ a) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  et que  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- c) Montrer que la droite  $(\Delta)$  est la tangente à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 1.
- 4/ Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0, +\infty[$  et que  $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$ . (on admet que  $(\ln x)^2 < \frac{1}{2}$ )
- 5/ Construire la droite  $(\Delta)$  et la courbe  $(\mathcal{C})$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (on admet que le point  $I(e, e-1)$  est un point d'inflexion de  $(\mathcal{C})$  et que  $e \approx 2,7$ )
- 6/ a) Montrer que la fonction  $H : x \mapsto x \ln x - x$  est une fonction primitive de la fonction  $x \mapsto \ln x$  sur  $]0, +\infty[$ , puis montrer que :  $\int_1^e \ln x dx = 1$ .
- b) En utilisant une intégration par partie, montrer que :  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ .
- c) Déterminer l'aire du domaine plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

### Partie III

On considère la suite numérique  $(u_n)_n$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

On pourra dans cette partie utiliser les résultats de l'étude de la fonction  $f$ .

- 1/ Montrer par récurrence que :  $1 \leq u_n \leq 2$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ . (on pourra utiliser la question II-3/a))
- 2/ Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est décroissante.
- 3/ En déduire que la suite  $(u_n)_n$  est convergente, puis déterminer sa limite.

  
**FIN**