

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ **Sujet 10** □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

**Exercice 1**

1/ Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $]1, +\infty[$  par :  $h(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+1)}$ .

a) Vérifier que pour tout  $x$  de  $]1, +\infty[$  :  $h(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ .

b) Calculer l'intégrale :  $I = \int_2^3 h(x) dx$ .

2/ En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :  $J = \int_0^1 3xe^{3x} dx$ .

**Exercice 2**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 6}$ .

1/ Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

2/ a) Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n > 1$ .

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2/ On pose, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $v_n = \frac{u_n + 4}{u_n - 1}$ .

a) Calculer  $v_n - 1$  en fonction de  $u_n$ , puis déduire que  $v_n > 1$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

b) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n = \frac{v_n + 4}{v_n - 1}$ .

c) Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{7}{2}$ .

d) Déterminer l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis déduire que :

$$u_n = \frac{3 \times 7^n + 2^{n+1}}{3 \times 7^n - 2^{n-1}}$$

e) Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 3**

Une boîte  $U_1$  contient trois billes blanches et quatre billes noires.

Une boîte  $U_2$  contient quatre billes blanches et trois billes noires.

Toutes les billes sont indiscernables au toucher.

On tire une bille de la boîte  $U_1$ , puis on tire une bille de la boîte  $U_2$ .

1/ On considère les deux événements :

A : « Les deux billes tirées sont de la même couleur »

B : « la bille tirée de la boîte  $U_1$  est noire »

Calculer  $p(B)$  et montrer que  $p(A) = \frac{24}{49}$ .

2/ Sachant que la bille tirée de la boîte  $U_1$  est noire, calculer la probabilité que les deux billes tirées soient de la même couleur.

## Exercice 4

### Partie I

On considère la fonction numérique  $g$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = e^x - x$$

1/ Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , puis étudier son signe.

2/ Calculer  $g(0)$  puis dresser le tableau de variation de  $g$ .

3/ En déduire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

### Partie II

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2e^x - x^2$$

et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ , puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2/ a) Vérifier que  $f(x) = x^2 \left( \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2} \right)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , puis donner une interprétation géométrique du résultat.

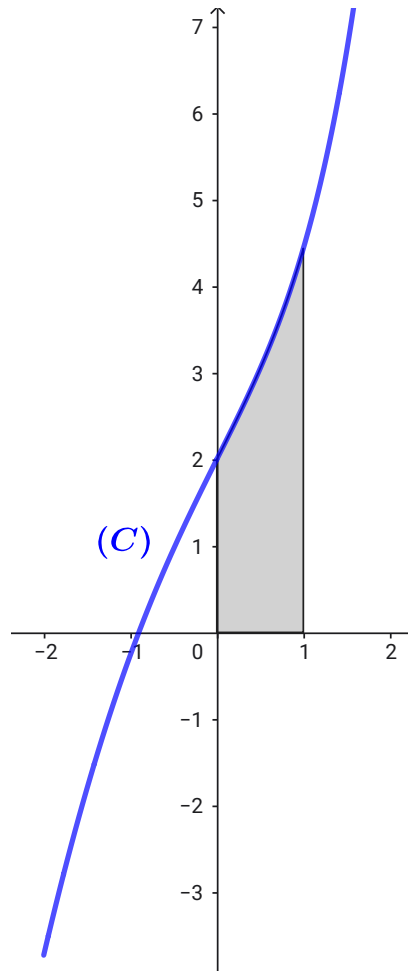
3 a) Montrer que  $f'(x) = 2g(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

b) En déduire le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$

4/ Vérifier que  $f''(x) = 2(e^x - 1)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  et étudier le signe de  $f''(x)$  puis déduire que le point  $I(0, 2)$  est un point d'inflexion de la courbe  $(C)$ .

5/ La courbe représentative suivante est une partie de la courbe  $(C)$  sur l'intervalle  $] -2, 2[$ .

Calculer l'aire du domaine coloré dans la figure ci-dessous.



**FIN**