



Sujet 6



Exercice 1

On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2
 - a Montrer que $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{3 - u_n}$.
 - b Montrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n < 2$.
- 3
 - a Montrer que $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 2)^2}{3 - u_n}$.
 - b Dédurre que la suite $(u_n)_n$ est croissante et qu'elle est convergente.
- 4 On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{2 - u_n}$.
 - a Calculer $v_{n+1} - v_n$, puis déduire que la suite $(v_n)_n$ est arithmétique de raison 1.
 - b Calculer v_0 puis déterminer v_n en fonction de n .
 - c Montrer que $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - \frac{1}{v_n}$; puis déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n = \frac{2n + 1}{n + 1}$.
 - d Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2

Une boîte contient 6 jetons indiscernables au toucher qui sont numérotés : 1; 1; 1; 1; 2; 2 .

On tire au hasard , successivement et sans remise 3 jetons de la boîte.

On considère les événements suivants :

A :« La somme des numéros des jetons tirés est égale à 3 »

B :« Le premier jeton tiré porte le numéro 2 ».

- 1
 - a Montrer que : $p(A) = \frac{1}{5}$ et $p(B) = \frac{1}{3}$.

b Calculer $p_B(A)$. Les événements A et b sont-ils indépendants? (justifier la réponse).

2 Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la somme des numéros portés par les trois jetons tirés.

a Déterminer les valeurs prises par X .

b Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	3	4	5
$p(X = x_i)$			

c Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de X .

Exercice 3

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x} + \ln(x)$.

et soit (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 a Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = +\infty$. Puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2 a Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x + \frac{2 + x \ln(x)}{x}$.

b Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

3 a Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

b Vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$ et étudier le signe de l'expression $(x-1)(x+2)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

c En déduire que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $]0, 1]$.

d Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.

4 a Vérifier que $f''(x) = \frac{4-x}{x^3}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

b Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire que la courbe (\mathcal{C}_f) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

5 a En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e \ln x dx = 1$.

b Calculer l'aire de la partie hachurée dans la figure ci-dessous.

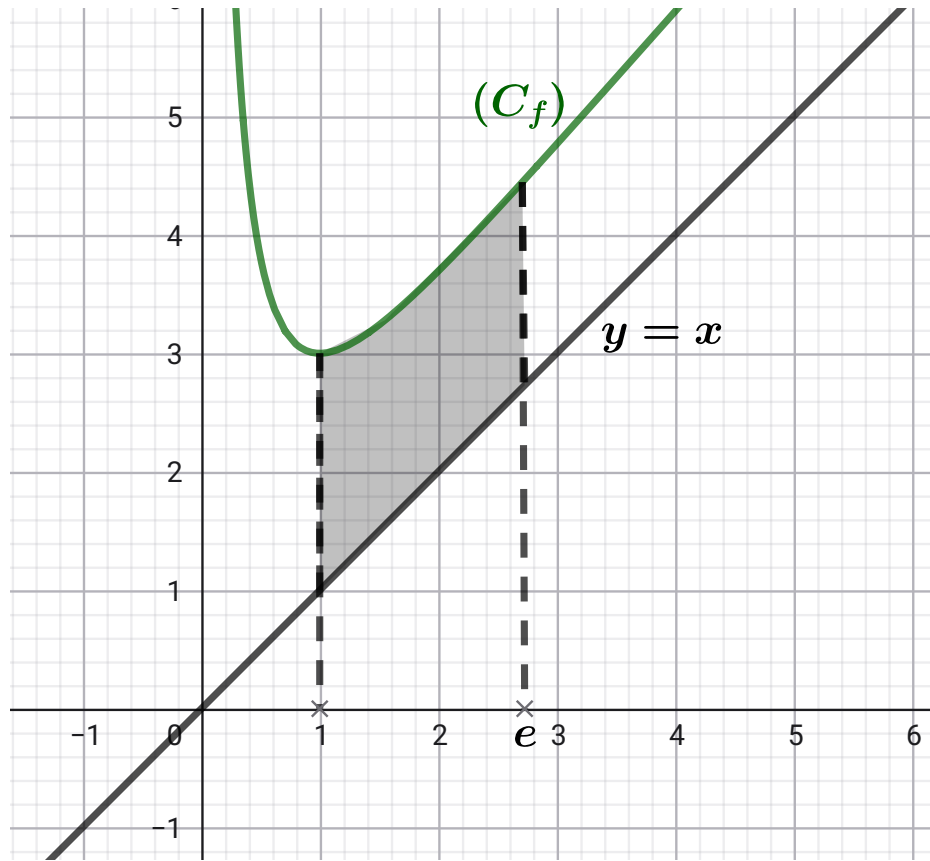


FIGURE 1 -

FIN