Sujet 7

Exercice 1

On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \text{ ; } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n > \frac{1}{2}$.
3. a. Montrer que $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

   b. Déduire la monotonie de la suite $(u_n)_n$, puis montrer qu'elle est convergente.

   c. Déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

   a. Calculer v_0 , puis montrer que la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

   b. Déterminer v_n en fonction de n et déduire que $u_n = \frac{1}{2}\left[11\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$.

   Montrer que : $S_n = \frac{55}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{2}$.

Exercice 2

Une urne contient 3 billes rouges , 4 billes noires et 3 billes blanches indiscernables au toucher.

1. **On tire au hasard et simultanément 3 billes de l'urne**.

   a. Calculer les probabilités des deux événements :

   A :« Les trois billes tirées sont de la même couleur »

   B :« Obtenir au moins une bille blanche ».

b) Calculer $p_B(A)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? (justifier la réponse).

2) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de billes blanches tirées.

a) Justifier que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

3) On répète cette épreuve 4 fois de suite en remettant, dans l'urne, après chaque tirage les billes tirées.
Calculer la probabilité pour que l'événement A soit réalisé 3 fois exactement.

Exercice 3

Partie I

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{g(x) = -1 + x + 2x \ln x}$$

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$; $g'(x) = 3 + 2 \ln x$.

b) Etudier le signe de $g'(x)$, puis dresser le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$.

c) Calculer $g(1)$, puis déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0, 1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1, +\infty[$.

Partie II

On considèrre la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = 1 - x + x^2\ lnx}$$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b) Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique des résultats.

2) a) Vérifier que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

b) En utilisant la question $I - 2 - c)$, dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

3) Dans la figure ci-dessous , $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0, 3]$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

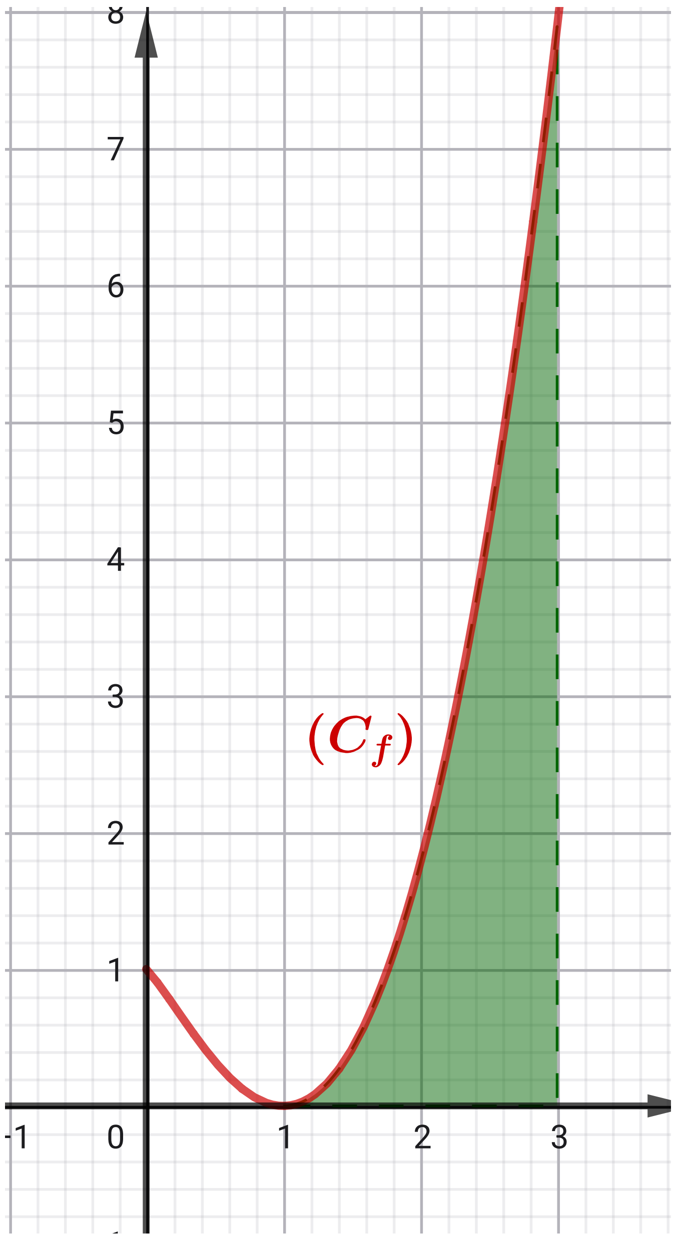

FIGURE 1 –

(a) En utilisant une intégration par parties , montrer que :
$\int_1^3 x^2 \ln x \, dx = 9 \ln 3 - \dfrac{26}{9}$.

(b) En déduire l'aire de la partie colorée, en unité d'aire.

FIN