★ ★ ★ ★ ★ Sujet 7 ★ ★ ★ ★ ★

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,1,1)$, $B(2,3,0)$, $C(2,2,-1)$ et $D(1,2,3)$.

1. a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, puis déterminer la surface du triangle ABC.
   b) Montrer que : $3x - y + z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
   c) Déterminer les coordonnées du point H, le point d'intersection du plan (ABC) avec la droite (Δ) qui passe par le point D et orthogonale au plan (ABC).
2. Soit $(\mathbb{S})$ la sphère d'équation :$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$.
   a) Montrer que le point D est le centre de la sphère $(\mathbb{S})$ et que son rayon est $R = 3$.
   b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère $(\mathbb{S})$ suivant un cercle $(\mathbb{C})$ dont on déterminera le centre et le rayon.
   c) Déterminer les équations cartésiennes des plans $(\mathbb{P})$ et $(\mathbb{P}')$ parallèles à (ABC) et tangents à $(\mathbb{S})$.

Exercice 2

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 12z + 48 = 0$.
2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, les points A, B et C d'affixes respectives $a = 6 + 2\sqrt{3}i$, $b = \bar{a}$ et $c = 8$.
   a) Montrer que : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   b) En déduire que le triangle OAB est équilatéral.
3. Donner l'écriture complexe de la rotation R de centre C et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
4. Montrer que B est l'image A par la rotation R.
5. Montrer que les points O, A, B et C sont cocycliques.

Exercice 3

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher , dont quatre boules sont rouges, trois boules sont vertes et trois boules sont blanches .
On tire simultanément et aléatoirement 4 boules du sac.

1. On considère les deux événements :
   A : " Obtenir deux boules rouges et deux boules vertes "
   B : " Il n'y a pas de boules blanches parmi les quatre boules tirées "
   Montrer que : $p(A) = \dfrac{3}{35}$ et que $p(B) = \dfrac{1}{6}$.
2. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches tirées.
   a. Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3.
   b. Montrer que $p(X = 3) = \dfrac{1}{30}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 4

On considère les intégrales : $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ et $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$.

1. Calculer A.
2. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$.
   a. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $f'(x) = \dfrac{3}{\cos^4(x)} - \dfrac{2}{\cos^2(x)}$.
   b. Montrer que : $3B - 2A = \dfrac{1}{2}$, puis calculer B.

Exercice 5

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + e^{-x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$, puis dresser le tableau de variation de g.

3 En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 1$ et $1 + xe^x > 0$.

Partie II

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = ln(1 + xe^x)$.
On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 Montrer que $D_f = \mathbb{R}$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x+1)e^x}{1+xe^x}$, puis dresse le tableau de variation de f.

4 Vérifier que pour tout : $x \in]0,+\infty[$; $f(x) = x + lnx + ln\left(1 + \dfrac{1}{xe^x}\right)$.

5 Etudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

6 Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$; f(x)-x = ln$\big($g(x)$\big)$, puis étudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite (Δ) : $y = x$.

7 Montrer que la droite (Δ) est la tangente à (C_f) au point $O(0,0)$.

8 Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
$\big($On prendra $f(-1) \simeq -0.5\big)$.

Partie III

On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $-1 \leq u_n < 0$.

2 Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.

3 Déduire que $(u_n)_n$ est convergente puis calculer sa limite.

FIN