https://www.dimamath.com □□ 2 Bac Seco-Sgc □□ Bac Blanc - Sujet 8

□□□□□□ Sujet 8 □□□□□□

Exercice 1

On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - u_n} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

1- a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -1 + \dfrac{3}{3 - u_n}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

c) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(u_n - 2)}{3 - u_n}$.

d) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

2- On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n}$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison 3 et déterminer son premier terme.

b) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{1 - v_n}$.

c) Donner l'expression de v_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{1 + 3^n}$.

d) Calculer , en justifiant la réponse, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 2

On considère les intégrales suivantes :

- $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\,dx$
- $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2}\,dx$
- $K = \displaystyle\int_0^1 x \ln\left(1 + x^2\right)\,dx$

1- Montrer que $I = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

2- a) Vérifier que pour tout réel x , $\dfrac{x^3}{1 + x^2} = x - \dfrac{x}{1 + x^2}$.

b) Déduire la valeur de l'intégrale J.

3- En utilisant une intégration par parties, montrer que : $K = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher : 4 boules rouges et 3 boules vertes.
On considère l'expérience suivantes :
On tire une boule b de l'urne et on marque sa couleur :

— Si b est rouge , alors on la remet dans l'urne puis on tire deuxième boule de l'urne.
— Si b est verte , alors on ne la remet pas dans l'urne puis on tire une deuxième boule de l'urne.

On considère les événements suivants :

— A : « Les deux boules tirées sont de la même couleur »
— B : « La deuxième boule tirée est rouge »

1- Montrer que $p(A) = \frac{23}{49}$.

2- Calculer $p(B)$.

3- Les événements A et B sont-ils indépendants ? (Justifier la réponse).

Exercice 4

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{g(x) = \ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

1- Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[\;\; ; g'(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3}$.

2- Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variation de g.

3- En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Partie II :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = (x - 1)\ln x - \frac{1}{x} - x + 3}$$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,; \vec{i}\,, \vec{j}\right)$.

1- a) Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$: $f(x) = x\ln x - \frac{x\ln x + x^2 - 3x + 1}{x}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

2- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement du résultat.

3- a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$; $f'(x) = g(x)$, puis interpréter le résultat $f'(x) = 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion.

4- a) Montrer que l'équation : $(x-1)\ln x = \dfrac{1}{x} + x - 3$ admet une unique solution α telle que $0,2 < \alpha < 0,3$.

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$.

FIN