

★ ★ ★ ★ ★ Sujet 8 ★ ★ ★ ★ ★

### Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, -1, 3)$ ,  $B(1, 1, -1)$ , le vecteur  $\vec{u}(2, 2, 1)$  et la sphère  $(S)$  d'équation cartésienne :  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 4z + 10 = 0$  et  $(P)$  l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ .

- 1 Déterminer les coordonnées de  $\Omega$  le centre de la sphère  $(S)$  et son rayon  $R$ .
- 2
  - a Montrer que  $(P)$  est le plan d'équation cartésienne :  $2x + 2y + z - 3 = 0$ .
  - b Calculer la distance  $d(\Omega, (P))$  et en déduire que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle  $(\Gamma)$  de rayon 1.
- 3
  - a Montrer que  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  est une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $B$  et orthogonale au plan  $(P)$ .
  - b Montrer que :  $\overrightarrow{B\Omega} \wedge \vec{u} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ .
  - c Montrer que :  $d(\Omega, (\Delta)) = \sqrt{2}$  et en déduire que la droite  $(\Delta)$  est tangente à la sphère  $(S)$  au point  $E\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

### Exercice 2

- 1 On considère le polynôme  $P$  de la variable complexe  $z$  défini par :
 
$$P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$$
  - a Déterminer le nombre réel  $y$  tel que le nombre complexe  $iy$  soit solution de l'équation  $P(z) = 0$ .
  - b Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$ , on ait ;  $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$ .
  - c Résoudre dans l'ensemble  $\mathcal{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$ .
- 2 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  tel que  $\|\vec{u}\| = 1 \text{ cm}$ .

- a Placer dans ce repère, les points A, B et E d'affixes respectives  $z_A = -7 + 5i$ ,  $z_B = -7 - 5i$  et  $z_E = i\sqrt{2}$ .
- b Déterminer l'affixe de l'image de E par la rotation R de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$ .
- c Placer sur la figure précédente le point C d'affixe  $z_C = 1 + i$ , puis déterminer l'affixe du point N tel que le quadrilatère ABCN soit un parallélogramme.
- d Placer le point D d'affixe  $z_D = 1 + 11i$  et calculer le nombre complexe  $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$  sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- e Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère ABCD.

### Exercice 3

Une urne contient 9 jetons indiscernables au toucher, dont quatre jetons sont blancs, trois jetons sont rouges et deux jetons sont verts. On tire successivement sans remise trois jetons de l'urne.

- 1 On considère les événements :
  - A : "Aucun jeton blanc n'est tiré"
  - B : "Obtenir exactement un seul jeton blanc"
 Calculer  $p(A)$  et montrer que  $p(B) = \frac{10}{21}$ .
- 2 Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de jetons blancs restés dans l'urne.
  - a Déterminer les valeurs prises par X.
  - b Montrer que  $p(X = 1) = \frac{1}{21}$  puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
  - c Déterminer l'espérance mathématique  $E(X)$  de la variable aléatoire X.

### Exercice 4

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On pose , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$  et  $w_n = 5^n u_n$ .

- 1 Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ , et exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- 2
  - a Montrer que la suite  $(w_n)$  est arithmétique de raison 5.
  - b Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$  et en déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 3
  - a Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on ait :  $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ .
  - b En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on ait :  $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice 5

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur par :

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$$

et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1
  - a Vérifier que pour tout réel  $x$ , on ait :  $x^2 - 2x + 2 = (x - 2)^2 + 1$ .
  - b En déduire que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- 2 Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ;  $f(2 - x) = f(x)$ , puis déduire que la droite  $(D) : x = 1$  est un axe de symétrie de la courbe  $(C_f)$ .
- 3
  - a Vérifier que pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$ , on ait :  $f(x) = 2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ .
  - b En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , puis interpréter géométriquement ce résultat.
- 4
  - a Montrer que pour tout réel  $x$  on ait :  $f'(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1}$
  - b Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 5
  - a Montrer que pour tout réel  $x$  on ait :  $f''(x) = \frac{2x(2-x)}{\left((x-1)^2 + 1\right)^2}$ .
  - b Étudier la concavité de la courbe  $(C_f)$ .
- 6 Construire la courbe  $(C_f)$ .
- 7 Soit  $h$  la restriction de la fonction  $f$  à l'intervalle  $[1, +\infty[$ .
  - a Montrer que la fonction  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
  - b Déterminer en fonction de  $x$  l'expression de  $h^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$ .

## Exercice 6

On pose :  $I = \int_{-2}^1 \frac{x}{x+3} dx$  et  $J = \int_{-2}^1 \ln(2x+6) dx$ .

- 1
  - a Vérifier que , pour tout réel  $x \neq -3$ , on ait :  $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ .
  - b Montrer que :  $I = 1 - 3\ln 2$ .
- 2 En utilisant une intégration par parties , montrer que :  $J = -I$ .

**FIN**