Sujet 9

Exercice 1

On note par $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ respectivement l'espace vectoriel réel et l'anneau unitaire des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $\mathcal{E} = \{M = aI + bA / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. a. Montrer que $(\mathcal{E}, +)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

   b. Établir que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est stable pour la multiplication des matrices par un réel.

   c. En déduire que $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

   d. Montrer que (I, A) est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

2. Soit $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$.

   Montrer que $\begin{cases} ax - 2by = 0 \\ bx + (a - 2b)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0)$.

3. $(\mathbb{C}^*, \times)$ est le groupe des nombres complexes non nuls. On pose

   $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

   a. Montrer que $A^2 + 2A + 2I = O$, où $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   b. Montrer que : $\forall (M, M') \in \mathcal{E}^{*2}$; $M \times M' \in \mathcal{E}^*$.

4. On considère l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \to & \mathcal{E}^* \\ a + ib & \mapsto & \varphi(a + ib) = (a + b)I + bA \end{cases}$

   a. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{E}^*$.

   b. Établir que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ sur $(\mathcal{E}^*, \times)$. pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c. En déduire la structure de $(\mathcal{E}^*, \times)$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère pour tout réel $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation

$$\boldsymbol{E_\theta : z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4\,(1-i)\,e^{i2\theta} = 0}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation E_θ.
2. On considère dans le plan complexe , les points M et M' d'affixes respectives $2e^{i\theta}$ et $-2\,(1-i)\,e^{i\theta}$ et le point N l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   - a. Déterminer l'ensemble décris par les points M lorsque θ varie dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   - b. Déterminer l'affixe du point N.
   - c. Montrer que le quadrilatère $OMNM'$ est un parallélogramme.
   - d. En déduire une construction du point M' à partir du point M.
3. a. Déterminer en fonction de θ , le module et un argument de $-2\,(1-i)\,e^{i\theta}$.
   - b. Déterminer l'ensemble décris par les points M' lorsque θ varie dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. On considère l'équation $\boldsymbol{E'_\theta : \left(z\sqrt{2}-1\right)^3 = (-2+2i)\,e^{i\theta}z^3}$.
   - a. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $(-2+2i)\,e^{i\theta}$.
   - b. Soit $\alpha \in \left]0, \pi\right[$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\left[\forall z \in \mathbb{C}^*; \frac{z\sqrt{2}-1}{z} = \sqrt{2}e^{i\alpha}\right] \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i\frac{1}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}\right).$$

   - c. En déduire les solutions de l'équation E'_θ.

Exercice 3

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que : $x^4 + 4 = \left(x^2+2\right)^2 - 4x^2$.
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire sous forme de produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et on note $d = A \wedge B$.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A nqui divise n, divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B , divise $4n$.

4. Dans cette question , on suppose que n est impair.
   - a) Montrer que A et B sont impairs et en déduire que d est impair.
   - b) Montrer que d divise n.
   - c) En déduire que d divise 2 puis que A et B sont premiers entre eux.
5. Dans cette question, on suppose que n est pair.
   - a) Montrer que $n^2 - 2n + 2$ est divisible par 4.
   - b) Montrer que d s'écrit sous la forme $d = 2p$ où p est impair.
   - c) Montrer que p divise n, et en déduire que $d = 2$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}}$.

1.
   - a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   - b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 6$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution a_n dans l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$.
   - c) Prouver que la suite $(a_n)_{n\geq 6}$ est décroissante et déduire qu'elle est convergente.
2.
   - a) Montrer que pour tout entier naturel $k > 1$, on a :
   $$\frac{ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2}\,dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$$
   - b) En utilisant une intégration par parties, exprimer en fonction de n, l'intégrale $\displaystyle\int_2^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.
3. Pour tout entier naturel $n > 1$, on pose $S_n = \dfrac{\ln 2}{2^2} + \dfrac{\ln 3}{3^2} + \dfrac{\ln 4}{4^2} + ... + \dfrac{\ln n}{n^2}$.
   - a) Montrer que, pour tout entier naturel $n > 1$, on a :
   $$S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}$$
   - b) En déduire que : $\dfrac{1+\ln 2}{2} - \dfrac{n+(n-1)\ln n}{n^2} \leq S_n \leq \dfrac{2+3\ln 2}{4} - \dfrac{1+\ln n}{n}$.
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et
   $$I_n = \frac{1}{n!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx.$$
   - a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, 0 \leq I_n \leq \dfrac{(\ln 2)^n}{n!}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   - b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{2}\dfrac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$.

d) Exprimer U_n en fonction de I_n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 5

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\,dt}$$

et soit $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $g(0)$.

b) Montrer que : $(\forall x > 0)\,;\ \frac{\pi}{4}e^{-2x} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}$ et déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique aux résultats.

3) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$(\forall u \in \mathbb{R})\,;\ \int_0^u (u-t)\,e^t\,dt = e^u - 1 - u$.

b) Montrer que : $(\forall u \in \mathbb{R}^+)\,;\ 0 \leq \int_0^u (u-t)\,e^t\,dt \leq \frac{u^2}{2}e^u$.

c) En déduire que : $(\forall u \in \mathbb{R})\,;\ |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2}e^{|u|}$.

4) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $h \in\,]-1,0[\, \cup\,]0,1[$.

a) Vérifier que :

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} + \int_0^1 e^{-x_0\left(1+t^2\right)}\,dt = \int_0^1 e^{-x_0\left(1+t^2\right)}\left(\frac{e^{-h\left(1+t^2\right)} - 1 + h\left(1+t^2\right)}{h\left(1+t^2\right)}\right)dt$$

b) En utilisant la question 3)$c)$, montrer que :
$|\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} + \int_0^1 e^{-x_0\left(1+t^2\right)}\,dt| \leq |h|e^2\int_0^1 e^{-x_0\left(1+t^2\right)}\,dt$.

c) Déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ g'(x) = -\int_0^1 e^{-x\left(1+t^2\right)}\,dt$.

5) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_g)$ au point d'abscisse 0.

b) Construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ et la droite (T).

FIN