Sujet 9

Exercice 1

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(T) : t^2 - 3t + 2 = 0$.

2/ Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $(L) : (\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$.

3/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) : e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

Exercice 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$

1/ Déterminer u_1 et u_2.

2/ Montrer que : $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3/ **a)** Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente.

4/ On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Montrer que : $u_n = 5 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

d) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Un bureau d'étude est constitué de 20 ingénieurs d'informatique et de génie civil qui sont distribués selon le tableau ci-dessous :

	Homme	Femme
Informatique	5	3
Génie civil	8	4

On choisit au hasard et **simultanément trois personnes** de ce bureau pour participer à une formation continue.

1/ **a)** Soit A l'événement « Toutes les personnes choisies sont des femmes ».
Montrer que $p(A) = \dfrac{7}{228}$

b) Sachant que toutes les personnes choisies sont des femmes, calculer la probabilité qu'elles soient de même spécialité.

2/ Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de spécialités des personnes choisies.

a) Montrer que $p(X = 1) = \dfrac{69}{285}$

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X.

Problème

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = (x-1)^2 e^x}.$$

1/ **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

c) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 x^2 e^x$.

d) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2/ **a)** Montrer que : $f'(x) = (x^2-1)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$, et calculer $f(1)$ et $f(-1)$ puis dresser le tableau de variation de f.

3/ Montrer que la fonction F définie par : $F(x) = \left(x^2 - 4x + 5\right)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4/ Dans la figure ci-dessous on a tracé la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Calculer l'aire de la partie hachurée.