Sujet 9

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,0,1)$, $B(0,-4,4)$ et $C(3,-4,5)$ et la sphère $(\mathcal{S})$ d'équation cartésienne : $x^2+y^2+z^2-4x+4y-6z+8=0$.

1. a. Montrer que $(\mathcal{S})$ a pour centre le point $\Omega(2,-2,3)$ et pour rayon $R=3$.
   b. Vérifier que le point A appartient à la sphère $(\mathcal{S})$, puis donner une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ tangent à $(\mathcal{S})$ en A.
2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}=2\vec{i}-5\vec{j}-6\vec{k}$ est normal au plan (ABC).
   b. Déduire que : $2x-5y-6z+4=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Montrer que les plans (ABC) et $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.
   d. Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère $(\mathcal{S})$ suivant un cercle (Γ) dont on déterminera le centre H et le rayon r.
3. Montrer que (Γ) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 2

On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{e^3}(u_n+e^3-1)\ ,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_n\geq 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
3. On considère la suite numérique $(v_n)_n$ définie par : $v_n=u_n-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   a. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n

c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{e^{3n}}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 1$.

Exercice 3

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = \dfrac{i}{2}(\sqrt{3}-i)$, $b = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $c = i$.

1) Vérifier que : $a = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis déduire l'écriture trigonométrique de a.

2) Montrer que $a = -ib^2$.

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

a) Donner l'écriture complexe de la rotation R.

b) Montrer que : $R(A) = B$ et $R(B) = C$.

c) Déduire la nature du triangle ABC en précisant une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$.

4) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan complexe d'affixe z tels que : $|2z-1-i\sqrt{3}| = 5$.

Exercice 4

Une urne U_1 contient deux boules blanches, une boule rouge et trois boules vertes.
Une autre urne U_2 contient une boule blanche, deux boules rouges et une boule verte.
Toutes les boules sont supposées indiscernables au toucher.
On considère l'expérience suivante : « On tire une boule de l'urne U_1, puis on tire une boule de l'urne U_2 » .
On considère les événements :

A : « Les deux boules tirées sont blanches »
B : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1) Montrer que : $p(A) = \dfrac{1}{12}$.

2) En utilisant la probabilité de l'événement contraire , montrer que :

$p(B) = \dfrac{17}{24}$.

3. Calculer $p(A \cup B)$.
4. On répète cette expérience trois fois, en remettant après chaque tirage chaque boule dans l'urne.
   Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé deux fois exactement.

Exercice 5

Partie 1

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 1 + 2ln(x).$$

Dans la figure ci-dessous , (D) est la droite d'équation $y = x - 1$ et $\left(\mathcal{C}_f\right)$ est la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto ln(x)$.

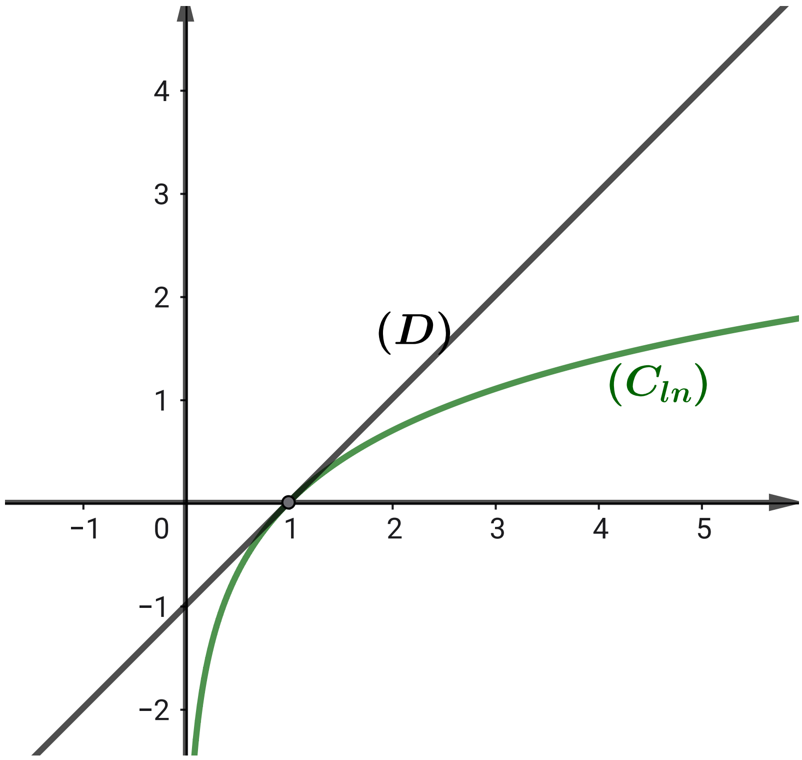

Figure 1 –

1. Calculer $g(1)$.
2. En utilisant la figure 1- précédente, montrer que $x - 1$ et $ln(x)$ ont le même signe.
3. En déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0, 1]$, et que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

Partie 2

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$, par :

$$f(x)=\left(\frac{x-2}{x}\right)ln(x)-\frac{1}{x}$$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=1cm)$.

1. Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, et interpréter graphiquement ce résultat.
2. a. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   b. En déduire la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
3. a. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on ait : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses exactement en deux points d'abscisses respectives α et β .$(\alpha<\beta)$.
5. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha\simeq 0,5$ et $\beta\simeq 2,9$ et on admet qu'elle a un point d'inflexion d'abscisse compris entre 1,7 et 1,8).
6. Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.
7. a. Calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto ln^2(x)$ sur $]0,+\infty[$, puis déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2\left(1-2\frac{ln(x)}{x}\right)dx$.
   b. En utilisant une intégration par parties, montrer que
   $$\int_1^2\left(\frac{x-2}{x}\right)ln(x)\,dx=2ln(2)-ln^2(2)-1.$$
   c. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

FIN