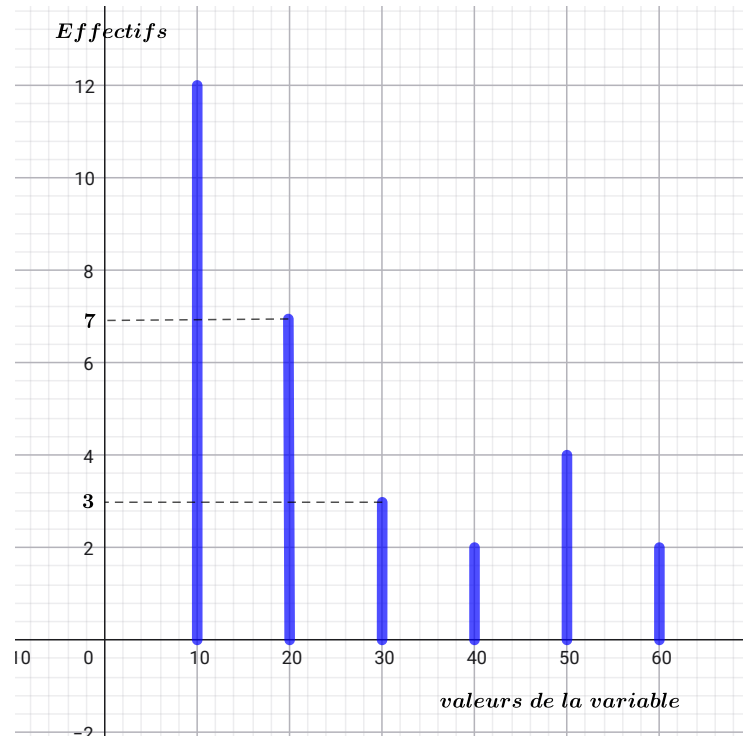


Corrigé Sujet 11

Exercice 1

L'histogramme de cette série statistique .



1/ Compléter le tableau suivant :

Valeurs de la variable statistique	10	20	30	40	50	60
Effectifs	12	7	3	2	4	2
Effectifs cumulés	12	19	22	24	28	30

2/ Calculer la moyenne arithmétique de cette série statistique.

La moyenne arithmétique de cette série statistique est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{12 \times 10 + 7 \times 20 + 3 \times 30 + 2 \times 40 + 4 \times 50 + 2 \times 60}{12 + 7 + 3 + 2 + 4 + 2} \\ &= \frac{120 + 140 + 90 + 80 + 200 + 120}{30} = \frac{750}{30} = 25 \end{aligned}$$

Alors : **La moyenne est : $\bar{x} = 25$**

3/ Déterminer le mode et la médiane de cette série statistique.

Mode

Le **mode** est la valeur qui possède l'effectif le plus élevé.

L'effectif maximal est 12, atteint pour la valeur $x = 10$.

Alors : **Le mode est : Mode = 10** ■

Médiane

La **médiane** M_e est la valeur qui partage la série en deux groupes d'égal effectif.

L'effectif total est $N = 30$ donc $\frac{N}{2} = 15$, donc la médiane est la moyenne des 15^e et 16^e valeurs dans la série ordonnée.

D'après le tableau des effectifs cumulés :

— Les 12 premières valeurs sont égales à 10 (effectif cumulé = 12).

— Les valeurs de rang 13 à 19 sont égales à 20 (effectif cumulé = 19).

Les 15^e et 16^e valeurs sont donc toutes les deux égales à 20.

Alors : **La médiane est : $M_e = \frac{20 + 20}{2} = 20$** ■

Exercice 2

1/ Résolution des équations

a) $\frac{x}{3} - 5 = \frac{1}{2} + x$

On multiplie tous les membres par 6 (PPCM de 3 et 2) :

$$6 \cdot \frac{x}{3} - 6 \cdot 5 = 6 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot x$$

$$2x - 30 = 3 + 6x$$

$$2x - 6x = 3 + 30$$

$$-4x = 33$$

$$x = -\frac{33}{4}$$

Alors : **la solution de cette équation est : $-\frac{33}{4}$** ■

b) $x\sqrt{3} - 2 = x + \sqrt{3}$

On regroupe les termes en x d'un côté et les constantes de l'autre :

$$x\sqrt{3} - x = \sqrt{3} + 2$$

$$x(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + 2$$

$$x = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 1}$$

En multipliant dans $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1}$ par $\sqrt{3}-1$ le numérateur et le dénominateur.

$$x = \frac{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2}{3 - 1} = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$$

Alors : **La solution de cette équation est : $x = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$** ■

c) $(4x - 5)(x + \sqrt{3}) = 0$

Rappelons la règle : « Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul » :

$$4x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{3} = 0$$

$$x = \frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{3}$$

Alors : **Les solutions de cette équation sont : $\frac{5}{4}$ et $-\sqrt{3}$.** ■

2/ Résolution des inéquations

a) $7x - 5 \leq -2(x + 1)$

$$7x - 5 \leq -2(x + 1)$$

$$7x - 5 \leq -2x - 2$$

$$7x + 2x \leq -2 + 5$$

$$9x \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Alors les solutions de cette inéquation sont :

Tous les nombres qui sont inférieurs ou égaux à $\frac{1}{3}$. ■

b) $\frac{x-3}{2} \leq x+1$

On multiplie les deux membres par $2 > 0$ (le sens de l'inégalité est conservé) :

$$x - 3 \leq 2(x + 1)$$

$$x - 3 \leq 2x + 2$$

$$x - 2x \leq 2 + 3$$

$$-x \leq 5$$

$$x \geq -5$$

Alors : Les solutions de cette inéquation sont :

Tous les nombres supérieurs ou égaux à -5 ■

Exercice 3

1/ Résolution algébrique du système

On considère le système :

$$\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ x + 2y - 13 = 0 & (2) \end{cases}$$

Méthode de substitution :

Dans l'équation $x + y = 10$ on calcule $y = 10 - x$

et on remplace dans l'équation $x + 2y = 13$ et on obtient :

$$x + 2(10 - x) = 13$$

$$-x + 20 = 13$$

$$\boxed{x = 7}$$

Et puisque $y = 10 - x$, on remplace par $x = 7$

$$y = 10 - 7$$

$$\boxed{y = 3}$$

Alors : **La solution du système est (7, 3).** ■

Vérification :

— Équation (1) : $7 + 3 = 10 \checkmark$

— Équation (2) : $7 + 2 \times 3 - 13 = 7 + 6 - 13 = 0 \checkmark$

2/ Problème d'Amale — Nombre de cahiers de chaque type

Mise en équations :

Posons x le nombre de cahiers petit format et y le nombre de cahiers grand format.

— Amale achète 10 cahiers en tout, donc : $x + y = 10$

— Le coût total est 130 dirhams, donc : $10x + 20y = 130$

On obtient le système :

$$\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ 10x + 20y = 130 & (2) \end{cases}$$

Et après simplification , on obtient le système :

$$\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ x + 2y = 13 & (2) \end{cases}$$

D'après la question 1/ la solution de ce système est le couple (7,3).

Alors : **Amale a acheté 7 cahiers petit format et 3 cahiers grand format.**

Vérification :

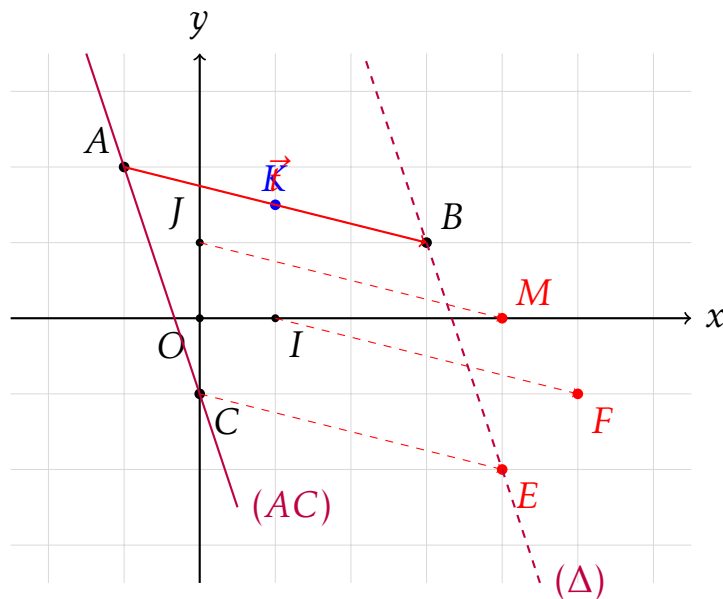
- Nombre total : $7 + 3 = 10$ cahiers ✓
- Coût total : $7 \times 10 + 3 \times 20 = 70 + 60 = 130$ dirhams ✓

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.

On a les points $A(-1;2)$, $B(3;1)$ et $C(0;-1)$. Les points I et J ont pour coordonnées respectives $(1;0)$ et $(0;1)$.

1/ Placer les points A , B et C



2/ Calculer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} On applique la formule des coordonnées d'un vecteur :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors : **Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont donc (4;-1).** ■

3/ Calculer la distance AB

La distance AB est donnée par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

Donc : **La distance AB est $\sqrt{17}$.** ■

4/ Calculer les coordonnées du point K, milieu du segment [AB]

Les coordonnées du milieu K s'obtiennent par la formule suivante :

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \end{cases}$$

Alors : **Les coordonnées du point K sont (1; 1,5).** ■

5/ Translation t qui transforme A en B

La translation t qui transforme A en B a pour vecteur associé $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(4;-1)$.

a) Construire E et F les images des points C et I respectivement par t : (Voir le graphique de la question 1 pour la construction). ■

b) Montrer que le point M(4;0) est l'image du point J par la translation t :

On calcule les coordonnées du vecteur \overrightarrow{JM} :

$$\overrightarrow{JM} \begin{pmatrix} x_M - x_J \\ y_M - y_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{JM}(4;-1)$. Et comme $\overrightarrow{AB}(4;-1)$, alors : $\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{AB}$.

Donc, **l'image de J par la translation t est M.** ■

6/ Montrer que $y = -3x - 1$ est l'équation de la droite (AC) :

L'équation réduite d'une droite non verticale est de la forme $y = mx + p$.

Calculons le coefficient directeur m de la droite (AC) avec

$A(-1;2)$ et $C(0;-1)$:

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1 - 2}{0 - (-1)} = \frac{-3}{1} = -3$$

L'équation de (AC) est donc de la forme $y = -3x + p$.

Puisque le point $C(0;-1)$ appartient à la droite (AC), son ordonnée à l'origine p est égale à l'ordonnée de C (car $x_C = 0$). Donc $p = -1$.

D'où : **L'équation de la droite (AC) est bien : $y = -3x - 1$.** ■

7/ a) Montrer que $B \notin (AC)$:

On remplace x par l'abscisse de B (qui est 3) dans l'équation de la droite (AC) :

$$y = -3(3) - 1 = -9 - 1 = -10$$

Or $y_B = 1$ donc $y_B \neq -3x_B - 1$. Alors les coordonnées de B ne vérifient pas l'équation de (AC). Donc :

$$\boxed{B \notin (AC)}$$

b) Déterminer l'équation de la droite (Δ) qui passe par B et parallèle à (AC) :

Lorsque deux droites sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur. Or La droite (AC) a pour coefficient directeur -3 , donc la droite (Δ) a aussi pour coefficient directeur $m' = -3$. Son équation est donc de la forme $y = -3x + p'$. Puisque $B(3;1)$ appartient à (Δ), ses coordonnées vérifient l'équation :

$$y_B = -3x_B + p' \iff 1 = -3(3) + p' \iff 1 = -9 + p' \iff p' = 10$$

Alors **l'équation de la droite (Δ) est donc : $y = -3x + 10$.** ■

Exercice 5

1/ Fonction linéaire f telle que $f(-1) = 2$

a) Montrer que $f(x) = -2x$ pour tout réel x

Une fonction linéaire est de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a $f(-1) = 2$, donc :

$$a \times (-1) = 2 \implies -a = 2 \implies a = -2.$$

Ainsi, pour tout réel x , **$f(x) = -2x$.** ■

b) Images de 3 et $-\frac{2}{3}$

$$f(3) = -2 \times 3 = -6, \quad ; \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = -2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Donc : **L'image de 3 est -6 par la fonction f** ■

et **l'image de $-\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{3}$ par la fonction f** ■

c) **Antécédent de 3 par f** On résout l'équation : $f(x) = 3$:

$$-2x = 3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Alors : **Le nombre réel qui a pour image 3 par f est $-\frac{3}{2}$.** ■

2/ **Fonction affine g de coefficient 2 et telle que : $g(2) = 5$**

a) **Sans calcul, déterminer $\frac{g(3) - g(2)}{3 - 2}$**

Le coefficient directeur d'une fonction affine est constant et vaut le taux de variation. Ici, le coefficient est 2, donc :

$$\frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = 2.$$

b) **En déduire la valeur de $g(3)$** On a :

$$\frac{g(3) - 5}{1} = 2$$

$$g(3) - 5 = 2$$

Donc : **$g(3) = 7$.** ■

b) **Expression de la fonction affine g**

Une fonction affine s'écrit sous la forme : $g(x) = ax + b$. Et comme $a = 2$, alors : $g(x) = 2x + b$.

Or $g(2) = 5$, Donc :

$$2 \times 2 + b = 5$$

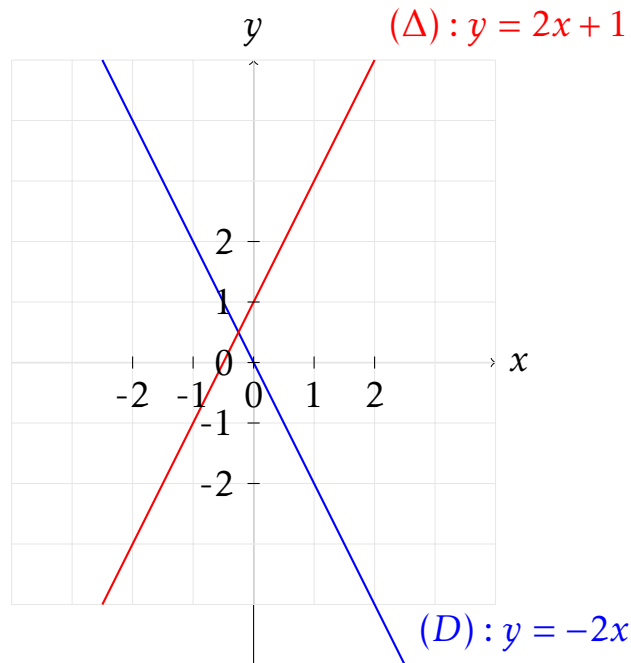
$$4 + b = 5$$

$$b = 1.$$

Alors : **$g(x) = 2x + 1$** ■

3/ Tracé des droites (D) et (Δ)

(D) : $y = -2x$, droite passant par l'origine et par (1, -2). (Δ) : $y = 2x + 1$, droite d'ordonnée à l'origine 1 et de pente 2.



4/ Vérification de $f\left(-\frac{1}{4}\right) = g\left(-\frac{1}{4}\right)$ et interprétation géométrique

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$g\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Donc : $f\left(-\frac{1}{4}\right) = g\left(-\frac{1}{4}\right)$. ■

Interprétation géométrique

Les points d'abscisse $-\frac{1}{4}$ sur les droites (D) et (Δ) ont la même ordonnée $\frac{1}{2}$, ce qui signifie que les deux droites se coupent au point $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. ■

Exercice 6

Données :

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que :

$$AB = 3 \text{ cm}, \quad AE = 6 \text{ cm}, \quad AD = 4 \text{ cm}.$$

1/ a) Montrer que $AF = 3\sqrt{5}$ cm.

Dans le parallélépipède rectangle, les arêtes adjacentes sont deux à deux perpendiculaires, donc le triangle AEF est rectangle en E et comme $AE = 6$ cm et $EF = AB = 3$ cm. Alors d'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEF :

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45.$$

Donc : $AF = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$ cm ■

b) Montrer que (AE) est perpendiculaire au plan (EFH) .

Le plan (EFH) contient les droites (EF) et (EH) . On sait que :

- La face $AEFB$ est un rectangle donc $(AE) \perp (EF)$
- La face $AEHD$ est rectangle donc $(AE) \perp (EH)$

Ainsi, (AE) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (EFH) , donc $(AE) \perp (EFH)$. ■

2/ Montrer que le volume de la pyramide $AEFGH$ est $V = 24$ cm³.

La base de la pyramide $AEFGH$ est le rectangle $EFGH$. Donc : $EF = AB = 3$ cm et $EH = AD = 4$ cm.

Alors l'aire de la base $EFGH$ est :

$$B = EF \times EH = 3 \times 4 = 12 \text{ cm}^2.$$

Hauteur de la pyramide : distance de A au plan $(EFGH) = AE = 6$ cm.

Donc le volume de la pyramide $AEFGH$ est :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times 12 \times 6 = 24 \text{ cm}^3.$$

D'où $V = 24$ cm³ ■

3/ On coupe la pyramide $AEFGH$ par un plan parallèle à la base passant par $F' \in [AF]$ tel que $AF' = 2\sqrt{5}$ cm.

a) Montrer que $k = \frac{2}{3}$.

La pyramide $AEFGH$ a pour hauteur $AE = 6$ cm et pour arête latérale $AF = 3\sqrt{5}$ cm. La réduction est de centre A et de rapport $k = \frac{AF'}{AF}$.

$$k = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3}.$$

Donc : $k = \frac{2}{3}$ ■

b) Vérifier que $7,1 \text{ cm}^3 < V' < 7,2 \text{ cm}^3$.

Le volume de la pyramide réduite est :

$$V' = k^3 \times V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 24. = \frac{8}{27} \times 24 = \frac{8 \times 24}{27} = \frac{192}{27} = \frac{64}{9} \approx 7,111\dots$$

Donc :

$$V' \approx 7,111 \text{ cm}^3.$$

Par conséquent : $7,1 < V' < 7,2$. ■

FIN