□□□□□□ Corrigé du sujet 11 □□□□□□

Exercice 1

On a $x*y = e^{1+(1-\ln x)(1-\ln y)}$ pour tout x et y de A. et comme $A =]e,+\infty[$, donc pour tout $x \in A$: $\ln x > 1$, soit $1-\ln x < 0$.

1/ Montrons que $*$ est une loi de composition interne dans A.

Soit x et y de A, posons $u = 1-\ln x < 0$ et $v = 1-\ln y < 0$. Donc $x*y = e^{1+uv}$.
Comme $u<0$ et $v<0$, on a $uv>0$, donc $1+uv>1$, donc :
$x*y = e^{1+uv} > e^1 = e$.
Donc $x*y \in A$.
D'où $*$ **est une loi de composition interne dans** A. ■

2/ Associativité et commutativité de $*$.

• Commutativité : Soit x et y de A, on a : $(1-\ln x)(1-\ln y) = (1-\ln y)(1-\ln x)$, donc $e^{1+(1-\ln x)(1-\ln y)} = e^{1+(1-\ln y)(1-\ln x)}$, d'où $x*y = y*x$.
Par conséquent $*$ **est commutative**. ■

• Associativité : Soit x et y de A, posons $\alpha = 1-\ln x$, $\beta = 1-\ln y$, $\gamma = 1-\ln z$.
Donc $\ln(x*y) = 1+\alpha\beta \Rightarrow 1-\ln(x*y) = -\alpha\beta$, par suite

$$(x*y)*z = e^{1+(1-\ln(x*y))(1-\ln z)} = e^{1+(-\alpha\beta)\gamma} = e^{1-\alpha\beta\gamma}.(1)$$

De même on a : $x*(y*z) = e^{1+(1-\ln x)(1-\ln(y*z))} = e^{1+\alpha(-\beta\gamma)}$. D'où :

$$x*(y*z) = e^{1+\alpha\cdot(-\beta\gamma)} = e^{1-\alpha\beta\gamma}.(2)$$

De (1) et (2) on déduit que $x*(y*z) = (x*y)*z$.
Alors $*$ **est associative**. ■

3/ Élément neutre ε.

On cherche $\varepsilon \in A$ tel que $x*\varepsilon = x$ pour tout $x \in A$.

$$x*\varepsilon = x \Leftrightarrow e^{1+(1-\ln x)(1-\ln\varepsilon)} = x \Leftrightarrow 1+(1-\ln x)(1-\ln\varepsilon) = \ln x$$

$$\Leftrightarrow (1-\ln x)(1-\ln\varepsilon) = \ln x - 1 = -(1-\ln x)$$

$$\Leftrightarrow (1-\ln x)(2-\ln\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow 2-\ln\varepsilon = 0 \text{ car } 1-\ln x \neq 0$$

Donc $\varepsilon = e^2$
Comme $e^2 > e$ donc $\varepsilon \in A$. Alors $\boldsymbol{\varepsilon = e^2}$ **est l'élément neutre de** $*$ **dans** A. ■.

4/ Montrons que $(A,*)$ est un groupe commutatif.

On a déjà montré que la loi $*$ est associative , commutative et admet un élément neutre $e=e^2$ il reste à montrer que tout élément de A est symétrisable pour $*$.
Soit $x\in A$, cherchons $x'\in A$ tel que $x*x'=e^2$:

$$x*x'=e^2 \Leftrightarrow e^{1+(1-\ln x)(1-\ln y)}=e^2 \Leftrightarrow 1+(1-\ln x)(1-\ln x')=\ln(e^2)=2$$

$$\Leftrightarrow (1-\ln x)(1-\ln x')=1 \Leftrightarrow 1-\ln x'=\frac{1}{1-\ln x} \Leftrightarrow \ln x'=\frac{\ln x}{\ln x-1}$$

$$\Leftrightarrow x'=e^{\dfrac{\ln x}{\ln x-1}}$$

Or $x\in A \Rightarrow x>e \Rightarrow \ln x>1 \Rightarrow \ln x>\ln x-1>0 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{\ln x-1}>1 \Rightarrow e^{\dfrac{\ln x}{\ln x-1}}>e \Rightarrow x'\in A$.
Donc tout élément de A admet un symétrique pour $*$ dans A.
Alors $\boldsymbol{(A,*)}$**est un groupe commutatif**. ■

5/ Montrons que $H=\{e^{1+2^n} \mid n\in\mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(A,*)$.

En effet on a :

- ★ $H\subset A$:car $h\in H \Rightarrow \exists n\in\mathbb{Z}: h=e^{1+2^n} \Rightarrow \ln h=1+2^n \Rightarrow \ln h>1$
$\Rightarrow h>e \Rightarrow h\in A$
- ★ $H\neq\emptyset$: car si $n=0$ alors $e^2\in H$).
- ★ Soient $a=e^{1+2^m}$ et $b=e^{1+2^n}$ de H. On a : $a=e^{1+2^m} \Rightarrow 1-\ln a=-2^m$ et $b=e^{1+2^n} \Rightarrow 1-\ln b=-2^n$. $a*b=e^{1+(1-\ln a)(1-\ln b)} \Rightarrow \ln(a*b)=1+(-2^m)(-2^n)$ $=1+2^{m+n} \Rightarrow a*b=e^{1+2^{m+n}} \Rightarrow a*b\in H$
L'inverse de b est $b'=e^{\dfrac{\ln b}{\ln b-1}} \Rightarrow \ln b'=\dfrac{\ln b}{\ln b-1}=\dfrac{1+2^n}{2^n}=1+2^{-n}$
Donc $b'=e^{1+2^{-n}}\in H$ car $-n\in\mathbb{Z}$.
Alors $\boldsymbol{H}$ **est un sous-groupe de** $\boldsymbol{(A,*)}$ ■

6/ On a : $B=]1,+\infty[$, $xTy=(x-1)(y-1)+1$, $\varphi(x)=\ln x$.

a) Montrons que φ est un isomorphisme de $(A,*)$ sur (B,T).

- ★ φ est bien définie de A vers B car si $x\in A \Rightarrow x>e \Rightarrow \ln x>1 \Rightarrow \varphi(x)=\ln x\in B$.
- ★ φ est un homomorphisme : car si $(x,y)\in A^2$ on a : $\varphi(x*y)=\ln(x*y)=1+(1-\ln x)(1-\ln y)$
$\varphi(x)\top\varphi(y)=(\ln x-1)(\ln y-1)+1$
Alors $\varphi(x*y)=\varphi(x)\top\varphi(y)$.

- ★ φ est bijective de A vers B : car la fonction ln est bijective de $]e,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$

Alors φ **est un isomorphisme de** $(A,*)$ sur (B,T). ■

b) Déduisons que $(B,\top)$ est un groupe commutatif. En effet on a $(A,*)$ est un groupe commutatif (question 4) et φ est un isomorphisme de $(A,*)$ sur (B,T), donc (B,T) **est un groupe commutatif**. ■

Exercice 2

PARTIE I

$(E_a)\ :\ z^2-(1+(1+i)a)z+ia^2+a=0$ où $a\in\mathbb{C}^*$.

1/ Vérifier que a est solution de (E_a).

On substitue $z=a$ dans l'équation (E_a) :

$a^2-(1+(1+i)a)a+ia^2+a=a^2-a-(1+i)a^2+ia^2+a=a^2-a-a^2-ia^2+ia^2+a$

$=a^2-a^2-ia^2+ia^2-a+a=0$

Donc a **est bien solution de** (E_a). ■

2/ On note z_1 et z_2 les solutions de (E_a) avec $z_1=a$.

a) Déterminer z_2.

D'après les relations de « Viète » pour une équation du second degré de la forme : $z^2+pz+q=0$ on a : $z_1+z_2=-p$ et $z_1\times z_2=q$.

Alors $z_1+z_2=1+(1+i)a \Rightarrow z_2=1+(1+i)a-a \Rightarrow z_2=1+ia$

Donc $\boldsymbol{z_2=1+ia}$ ■

b) On a $z_2=1+ia=iz_1+1$ et comme $z_B=z_2$ et $z_A=z_1$, alors $z_B=iz_A+1$.

On cherche une rotation r de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ telle que $r(A)=B$ d'expression complexe : $z'=iz+1$.

Le centre Ω de la rotation r est le seul point du plan complexe invariant par r, i.e : $r(\Omega)=\Omega \Leftrightarrow \omega=i\omega+1 \Leftrightarrow \omega=\dfrac{1}{1-i} \Leftrightarrow \omega=\dfrac{1+i}{2}$.

et on a $e^{i\theta}=i \Leftrightarrow \theta\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Alors la rotation r a pour centre le point Ω d'affixe $\omega=\dfrac{1+i}{2}$ et d'angle $\theta=\dfrac{\pi}{2}$. ■

Partie II

1/ a) Posons $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a : $|z|^2=x^2+y^2$ et

$1+iz=1+i(x+iy)=1-y+ix \Rightarrow |1+iz|^2=(1-y)^2+x^2$. Donc :

$|z|=|1+iz| \Leftrightarrow x^2+y^2=(1-y)^2+x^2 \Leftrightarrow y^2=1-2y+y^2 \Leftrightarrow 2y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$

Ainsi : $|z|=|1+iz| \Leftrightarrow Im(z)=\dfrac{1}{2}$. ■

b) Déduire l'équivalence $\begin{cases} |z| = |1+iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

D'après **a)**, $|z| = |1+iz| \Leftrightarrow Im(z) = \frac{1}{2}$, i.e. $y = \frac{1}{2}$.

En substituant dans $|z| = 1$, on a : $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

▲ Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$: l'argument est $\frac{\pi}{6}$, donc $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

▲ Si $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$: l'argument est $\frac{5\pi}{6}$, donc $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

D'où $\begin{cases} |z| = |1+iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Inversement :

- si $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors $|z| = 1$ et $|1+iz|^2 = |1+ie^{i\frac{\pi}{6}}|^2 = |1+\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$.

  Alors $z = e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \begin{cases} |z| = |1+iz| \\ |z| = 1 \end{cases}$

- Si $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ alors $|z| = 1$ et $|1+iz|^2 = |1+ie^{i\frac{5\pi}{6}}|^2 = |1+\frac{-\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

  Alors $z = e^{i\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow \begin{cases} |z| = |1+iz| \\ |z| = 1 \end{cases}$

D'où l'équivalence souhaitée. ■

2/ On considère le système $(S) : \begin{cases} z^n(1+iz) = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que toute solution z de (S) vérifie $z \in \left\{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}\right\}$.

Soit z solution de (S). On a $|z| = 1$ et $z^n(1+iz) = 1$.

En passant aux modules, on a :

$$|z^n(1+iz)| = 1 \implies |z|^n \cdot |1+iz| = 1 \implies |1+iz| = 1 = |z|$$

D'après la question **1/a)**, $Im(z) = \frac{1}{2}$, et d'après la question **1/b)**, $z \in \left\{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}\right\}$.D'où le résultat. ■

b) Vérifier que $1+ie^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+ie^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

D'une part :

$1+ie^{i\frac{\pi}{6}}=1+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

D'où : $1+ie^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$. ■

D'autres parts :

$1+ie^{i\frac{5\pi}{6}}=1+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

D'où : $1+ie^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$. ■

c) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est solution de $(S)\Leftrightarrow n\equiv -2[12]$; idem pour $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ avec $5n\equiv 2[12]$

Pour $z=e^{i\frac{\pi}{6}}$:

En utilisant **b)**, z est solution de $(S)\Leftrightarrow z^n(1+iz)=1 \Leftrightarrow \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}=1$

$\Leftrightarrow e^{i\left(\frac{n\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}=1 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n+2}{6}=2k \Leftrightarrow n+2=12k$

$\Leftrightarrow n\equiv -2[12]$. ■

Pour $z=e^{i\frac{5\pi}{6}}$:

z est solution de $(S)\Leftrightarrow z^n(1+iz)=1 \Leftrightarrow \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^n\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}=1$

$\Leftrightarrow e^{i\left(\frac{5n\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}=1 \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5n-2}{6}=2k \Leftrightarrow 5n-2=12k$

$\Leftrightarrow 5n\equiv 2[12]$. ■

d) Justifier l'équivalence $5n\equiv 2[12]\Leftrightarrow n\equiv -2[12]$.

On remarque que $5\wedge 12=1$ et que la congruence est compatible avec la multiplication. Alors :

$5n\equiv 2[12]] \Leftrightarrow 25n\equiv 10[12] \Leftrightarrow n\equiv 10[12] \Leftrightarrow n\equiv -2[12]$

Car $25n\equiv n[12]$ et $10\equiv -2[12]$

Donc : $5n\equiv 2[12] \Leftrightarrow n\equiv -2[12]$. ■

e) Ensemble des solutions de (S).

D'après **c)** et **d)**, les deux conditions $n\equiv -2[12]$ et $5n\equiv 2[12]$ sont équivalentes. Autrement dit, $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est solution de (S) si et seulement si $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ l'est aussi.

Alors : L'ensemble des solutions de (S) est :

$$\mathcal{S}:\begin{cases}\emptyset & \text{si } n\not\equiv 10[12]\\ \left\{e^{i\frac{\pi}{6}},\ e^{i\frac{5\pi}{6}}\right\} & \text{si } n\equiv 10[12]\end{cases}$$

■

Exercice 3

Soit p un nombre premier tel que $p\equiv 5[6]$ et $p>3$.
On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation $(E): x^3+y^3=p(1+xy)$.
Soit $(x,y)\in\mathbb{N}^{*2}$ une solution de (E). On pose $d=x\wedge y$ et $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$ tel que $x=da$ et $y=db$.

1/ **a)** Montrer que $a \wedge b = 1$ et $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2ab)$.

Par définition, $d = \gcd(x, y)$, $x = da$, $y = db$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.
On a $d = x \wedge y = da \wedge db = d(a \wedge b)$, donc $a \wedge b = 1$.
En substituant dans (E) : $(da)^3 + (db)^3 = p(1 + da \cdot db) \Rightarrow d^3a^3 + d^3b^3 = p(1 + d^2ab)$
Alors : $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2ab)$. ■

b) Montrer que $d^3 \wedge (1 + d^2ab) = 1$.

Soit $\delta = d^3 \wedge (1 + d^2ab) \Rightarrow \delta \mid d^3$ et $\delta \mid (1 + d^2ab)$
$\Rightarrow \delta \mid d(1 + d^2ab) - d^3ab \Rightarrow \delta \mid d \Rightarrow \delta \mid 1 + d^2ab - d^2ab \Rightarrow \delta \mid 1 \Rightarrow \delta = 1$.
Ainsi $d^3 \wedge (1 + d^2ab) = 1$. ■

c) Déduire que $d = 1$.

De l'équation $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2ab)$, on tire que $d^3 \mid p(1 + d^2ab)$.
Puisque $d^3 \wedge (1 + d^2ab) = 1$, on a $d^3 \mid p$.
p est premier, donc ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p. Ainsi $d^3 \in \{1, p\}$ et comme $d \mid d^3$ donc $d \mid p$ donc $d^3 = 1$, i.e. $d = 1$.
Donc $d = 1$ ■
On obtient donc le système :

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = p(1 + ab) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

2/ Montrer que $p \wedge b = 1$ et $p \wedge a = 1$.

De $a^3 + b^3 = p(1 + ab)$, on a $p \mid a^3 + b^3$.
Supposons $p \mid b$. Alors $p \mid a^3 + b^3 - b^3 = a^3$, donc $p \mid a$ (car p est premier), donc $p \mid \gcd(a, b) = 1$, contradiction car $p > 3$. Donc p ne divise pas b, d'où $p \wedge b = 1$.
De même, $p \wedge a = 1$, puisque a et b jouent le même rôle. ■

3/ Montrer que $a^3 \equiv -b^3[p]$ et $a^{p-1} \equiv b^{p-1}[p]$.

Première congruence.
On a $a^3 + b^3 = p(1 + ab) \Rightarrow a^3 + b^3 \equiv 0[p]$, donc :

$$a^3 \equiv -b^3[p].$$

■

Deuxième congruence.
D'après le petit théorème de Fermat, et puisque $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, on a :

$$a^{p-1} \equiv 1[p] \quad \text{et} \quad b^{p-1} \equiv 1[p].$$

Donc :

$$a^{p-1} \equiv b^{p-1}[p].$$

■

4/ Déduire que $a \equiv -b \pmod p$, et écrire $p = 5 + 6k$.

On a $a^3 \equiv -b^3[p] \Rightarrow (a^3)^{1+2k} \equiv -(b^3)^{1+2k}[p] \Rightarrow a^{3+6k} \equiv -b^{3+2k}[p]$
$\Rightarrow a \times a^{3+2k} \equiv -a \times b^{3+2k}[p] \Rightarrow a^{p-1} \equiv -a \times b^{p-2}[p] \Rightarrow b^{p-1} \equiv -a \times b^{p-2}[p]$
(Puisque $p = 5 + 6k$)
$\Rightarrow p \mid (b^{p-1} + a \times b^{p-2}) \Rightarrow p \mid b^{p-2}(a+b), \Rightarrow p \mid (a+b)$ (car $p \wedge b = 1$)
$\Rightarrow a + b \equiv 0[p]$
Ainsi $a \equiv -b[p]$. ■

5/ Montrer que $u(a-b)^2 + (u-1)ab = 1$.

Puisque $a \equiv -b[p]$, on a $p \mid a+b$, donc $a + b = pu$ pour un certain $u \in \mathbb{N}^*$.
On développe $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)\big((a-b)^2 + ab\big)$.
Donc : $[a^3 + b^3 = p(1+ab)$ et $a + b = pu] \Rightarrow (a+b)\big((a-b)^2 + ab\big) = p(1+ab) \Rightarrow$ $pu\big((a-b)^2 + ab\big) = p(1+ab) \Rightarrow u(a-b)^2 + uab = 1 + ab.$ Donc :

$$u(a-b)^2 + (u-1)ab = 1.$$

■

En déduire que : $\begin{cases} a + b = p \\ |a-b| = 1 \end{cases}$

Puisque $a, b, u \in \mathbb{N}^*$ et d'après l'égalité $u(a-b)^2 + (u-1)ab = 1$, on a : $(u-1)ab \geq 0$, et $0 \leq u(a-b)^2 \leq 1$, donc $u(a-b)^2 \in \{0, 1\}$.(car $u \geq 1$)

Cas 1 : Si $u(a-b)^2 = 1$ et $(u-1)ab = 0$.
Alors $u = 1$ et $(a-b)^2 = 1$, donc $|a-b| = 1$. On a bien le système :

$$\begin{cases} a + b = p \\ |a-b| = 1 \end{cases}$$

Cas 2 : Si $u(a-b)^2 = 0$ et $(u-1)ab = 1$.
Alors $a = b$ et $(u-1)ab = 1$, donc $u - 1 = 1/ab$. Puisque $u, a, b \in \mathbb{N}^*$, cela exige $ab = 1$, donc $a = b = 1$, et $u = 2$. Mais alors $a \wedge b = 1$, $a + b = 2 = pu = 2p \Rightarrow$ $p = 1$,ce qui est absurde car $p > 3$. Donc on a nécessairement :

$$\begin{cases} a + b = p \\ |a-b| = 1 \end{cases}$$

■

6/ Ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{N}^{*2}$.

D'après les questions précédentes on a vu que si (x, y) est une solution de (E) dans $\mathbb{N}^{*2}$ alors $x \wedge y = 1$ et (x, y) est solution du système $\begin{cases} x + y = p \\ |x-y| = 1 \end{cases}$, et puisque $x = a$ et $y = b$ on a : $a + b = p$ et $|a-b| = 1$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$:

Cas 1 : Si $a-b=1$, donc $a=\dfrac{p+1}{2}$,et $b=\dfrac{p-1}{2}$ (qui sont entiers car p est premier et $p>3$ donc p est impair).
Cas 2 :$b-a=1$, donc $a=\dfrac{p-1}{2}$, et $b=\dfrac{p+1}{2}$.
Vérifions que $pgcd(a,b)=1$.
On a : $pgcd\left(\dfrac{p+1}{2},\dfrac{p-1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}pgcd(p+1,p-1)$. Or $pgcd(p+1,p-1)\mid 2$, et puisque p est impair, $\dfrac{p-1}{2}$ et $\dfrac{p+1}{2}$ sont entiers consécutifs, donc premiers entre eux.
Alors $pgcd(x,y)=pgcd(a,b)=pgcd\left(\dfrac{p-1}{2},\dfrac{p+1}{2}\right)=1$ D'où L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right),\quad\left(\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}\right)\right\}$$

■

Exercice 4

PARTIE I

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

1/ Vérifier que f est impaire et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$f(-x)=\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}=\frac{\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}}=\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}=-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-f(x).$$

Donc f est impaire (et $f(0)=0$, ce qui est cohérent).

Et on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(-y)=\lim\limits_{y\to+\infty}(-f(y))=-1$ (En effectuant le changement de variable $y=-x$). ■

2/ Étudier les variations de f

Remarquons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{2e^{2x}\left[(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)\right]}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

Comme $e^{2x} > 0$ et $(e^{2x}+1)^2 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

■

3/ f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $I =]-1,1[$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. ■

4/ Équation de la tangente T en $O(0,0)$

La tangente en $O(0,0)$ a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

et on a : $f'(0) = \frac{4e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{4}{4} = 1$ et $f(0) = 0$. D'où $(T) : y = x$.
L'équation de la tangente T est donc :

$$y = x.$$

■

5/ Vérifier que $f'(x) = 1 - f^2(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :$f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$, et :

$$1 - f^2(x) = 1 - \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2 = \frac{(e^{2x}+1)^2 - (e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

Alors : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 1 - f^2(x)$

En déduire $\forall x \geq 0 : 0 \leq f(x) \leq x$

Soit $x \geq 0$, on a : pour tout $t \in [0,x]$: $f'(t) = 1 - f^2(t)$ donc $f't) \leq 1$, donc d'après le théorème des accroissements finis appliqué sur $[0,x]$:

$$f(x) - f(0) \leq 1 \cdot (x-0) \implies f(x) \leq x.$$

Or $f'(x) > 0$ et $f(0) = 0$, alors f est croissante et $f(x) \geq 0$.
D'où : $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f(x) \leq x$. ■

6/ Justifier $\forall x \geq 0 : 0 \leq 1 - f'(x) \leq x^2$.

On a d'après la question 5/ $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f(x) \leq x$, donc $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq f^2(x) \leq x^2$
et $1 - f'(x) = f^2(x)$. Alors $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq 1 - f'(x) \leq x^2$. ■

En déduire $\forall x \geq 0 : 0 \leq x - f(x) \leq \dfrac{x^3}{3}$

Posons $g(x) = x - f(x)$. Alors $g(0) = 0$ et $g'(x) = 1 - f'(x)$.

Soit $x \geq 0$, on a $\forall t \in [0,x] : 0 \leq 1 - f'(t) \leq t^2$ donc $\forall t \in [0,x] : 0 \leq g'(t) \leq t^2$ par passage aux intégrales, on a :

$$0 \leq g(x) - g(0) \leq \int_0^x t^2 \, dt = \frac{x^3}{3},$$

Ainsi : $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{x^3}{3}.$ ■

7/ Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right), \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

a) Vérifier que $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$

On a : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$ ■

C'est une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

■

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n - S_n \leq \frac{1}{3n^2}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$

D'après la question 6 : $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{x^3}{3}$ en posant $x = \frac{1}{n+k}$:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall k \in \{1,2,\dots,n\}) : 0 \leq \frac{1}{n+k} - f\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(n+k)^3}.$$

En sommant de $k=1$ à n , on a :

$$0 \leq u_n - S_n \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^3}.$$

Or $(n+k) \geq n+1 \geq n$ pour $k \geq 1$, donc $(n+k)^3 \geq n^3$, et :

$$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n^3} = \frac{1}{3n^2}.$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq u_n - S_n \leq \frac{1}{3n^2}.$ ■

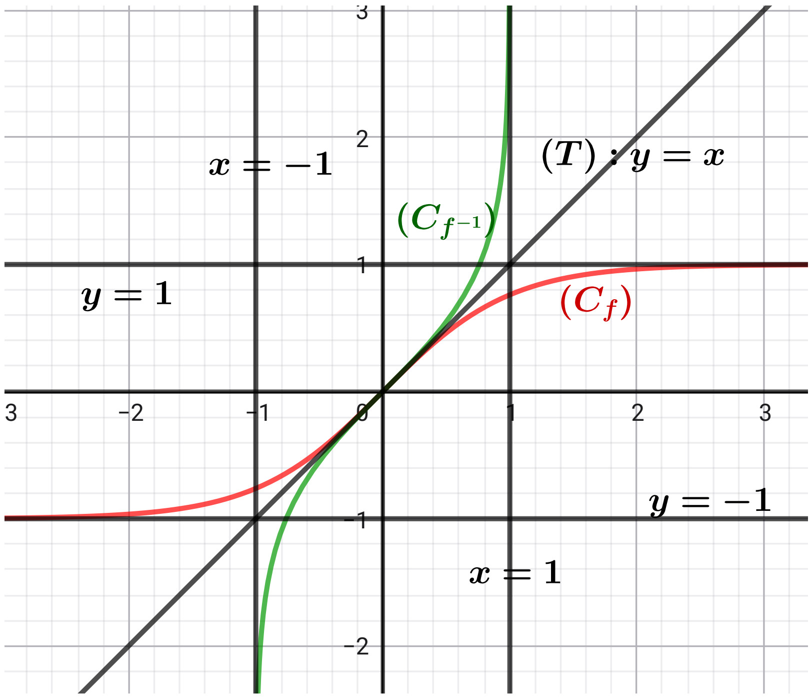
Par le théorème des gendarmes, puisque $\frac{1}{3n^2} \to 0$ et $u_n \to \ln 2$:

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - S_n) = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2.$$

■

8/ Courbes (C_f), $(C_{f^{-1}})$ et tangente T

Les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (tangente T). On les trace dans le même repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.(On prend $\|\vec{i}\| = 1cm$)



■

9/ Montrer que $F(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, donc F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$F'(x) = \frac{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)'}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Multiplions numérateur et dénominateur par e^x on obtient :

$$F'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = f(x).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$. ■

10/ Déduire $S_\lambda = \lambda^2 - 2\ln\left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right)$ cm^2

Soit $\lambda \in]0,1[$, on note S_λ l'aire en cm^2 du domaine

$$D_\lambda = \left\{M(x,y) \in \mathbb{P} / x \in [0,\lambda], y \in [0,\lambda], f(x) \leq y \leq f^{-1}(x)\right\}$$

Le domaine D_λ est délimité par la courbe (C_f) en bas, la courbe $(C_{f^{-1}})$ en haut, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$

Comme les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (T) , alors $S_\lambda = 2\left(\int_0^\lambda (x - f(x))\,dx\right)cm^2$. D'où :

$$S_\lambda = \left(\lambda^2 - 2\int_0^\lambda f(x)\,dx\right)cm^2 = \left(\lambda^2 - 2\left[F(x)\right]_0^\lambda\right)cm^2$$

Donc :

$$S_\lambda = \left(\lambda^2 - 2\ln\left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right)\right)\text{cm}^2.$$

■

PARTIE II

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,dt & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1/ Montrer que F est une fonction impaire.

Rappelons que f est une fonction impaire : $\forall x \in \mathbb{R}; f(-x) = -f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

On effectue le changement de variable $t = -u$ (donc $dt = -du$) :

$t = -x \Rightarrow u = x,$

$t = -2x \Rightarrow u = 2x.$

Donc :

$$F(-x) = \int_x^{2x} \frac{f(-u)}{-u}(-du) = \int_x^{2x} \frac{f(-u)}{u}\,du = \int_x^{2x} \frac{-f(u)}{u}\,du = -F(x).$$

De plus, $F(-0) = F(0) = 0 = -F(0)$.

D'où $F(-x) = -F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc F **est impaire**. ■

2/ Montrer que $\forall x > 0 : f(x)\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \leq F(x) \leq f(2x)\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt.$

On a vu dans la partie I que f est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $x > 0$ on a : $x < 2x$ donc pour tout $t \in [x, 2x]$; $f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$ Donc pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$f(x) \leq f(t) \leq f(2x).$$

En divisant par $t > 0$:

$$\frac{f(x)}{t} \leq \frac{f(t)}{t} \leq \frac{f(2x)}{t}.$$

En intégrant sur $[x, 2x]$:

$$f(x)\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \;\leq\; F(x) \;\leq\; f(2x)\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt.$$

■

3/ Déduire que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ln 2$ et que F est continue en 0.

On a :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln t\Big]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln 2.$$

Donc L'encadrement de la question 2 devient :

$$f(x)\ln 2 \;\leq\; F(x) \;\leq\; f(2x)\ln 2.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(2x) = 1$, alors d'après le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ln 2.$$

■

De même on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(2x) = 0$, alors d'après le **théorème des gendarmes** :

$$0\cdot\ln 2 \leq F(x) \leq 0\cdot\ln 2 \implies \lim_{x\to 0^+} F(x) = 0 = F(0).$$

Comme la fonction F est impaire, alors $\lim_{x\to 0^-} F(x) = 0$ également. Donc F **est continue en** 0. ■

4/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que $\forall x > 0 : F'(x) = \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Soit G une primitive de $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. On a alors :

$$F(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x).$$

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ comme composée/différence de fonctions dérivables, et on a :

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2\frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x} = \frac{f(2x)}{x} - \frac{f(x)}{x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$$

■

5/ En appliquant le TAF deux fois, montrer que

$$(\forall x > 0) : 1 - f^2(2x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq 1 - f^2(x)$$

.

Soit $x > 0$ La fonction F est continue sur $[0, x]$ et est dérivable sur $]0, x[$ alors d'après le TAF

$$(\exists c \in]0, x[) : \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(c) = \frac{f(2c) - f(c)}{c}$$

Comme la fonction f est continue et dérivable sur $[c, 2c]$, alors en appliquant TAF à f sur $[c, 2c]$ on a :

$$\exists d \in]c, 2c[: \frac{f(2c) - f(c)}{2c - c} = f'(d) \Rightarrow \frac{f(2c) - f(c)}{c} = f'(d).$$

Or $f'(x) = 1 - f^2(x)$ et $0 < c < d < 2c < 2x$. Donc :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = 1 - f^2(d), \quad d \in (c, 2c) \subset (0, 2x).$$

Puisque f^2 est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$ (car $f > 0$ et f croissante pour $x > 0$) et $0 < d < 2x$:

$$f^2(x) \leq f^2(d) \leq f^2(2x) \Rightarrow 1 - f^2(2x) \leq 1 - f^2(d) \leq 1 - f^2(x).$$

D'où :

$$(\forall x > 0) : 1 - f^2(2x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq 1 - f^2(x).$$

■

6/ Déduire que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 1$.

L'encadrement de la question 5 donne, lorsque $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - f^2(2x)\right) = 1 - f^2(0) = 1 - 0 = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - f^2(x)\right) = 1 - f^2(0) = 1.$$

Par le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1.$$

Donc F est dérivable à droite en 0 et on a : $F'_d(0) = 1$ Soit $x < 0$ posons $y = -x$ donc $y > 0$, alors d'après la question 5/ on a :

$$1 - f^2(2y) \leq \frac{F(y) - F(0)}{y} \leq 1 - f^2(y).$$

Donc :

$$1 - f^2(-2x) \leq \frac{F(-x) - F(0)}{-x} \leq 1 - f^2(-x).$$

Comme F et f sont impaires, alors :

$$(\forall x<0) : 1-f^2(2x) \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq 1-f^2(x)$$

En utilisant le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x)-F(0)}{x} = 1.$$

Donc la fonction F est dérivable à gauche en 0 et on a : $F'_g(0)=1$ D'où F est dérivable en 0 et on $F'(0)=1$. ■

7/ Tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x>0$, d'après la question 4, $F'(x)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$. Pour $x>0$: f est **strictement croissante** et $2x>x$, donc $f(2x)>f(x)$, ainsi $F'(x)>0$.
De plus, $F'(0)=1>0$. Donc $(\forall x\geq 0)$; $F'(x)>0$.

Tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^+$:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$F'(x)$	$+$
$F(x)$	0 $\nearrow$ $\ln 2$

■

PARTIE III

On considère la suite (I_n) définie par : $I_n=\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})}(f(t))^n\,dt$.

1/ Calculer I_0 et I_1

— $I_0=\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})}(f(t))^0\,dt=\int_0^{\ln(\sqrt{3})}1\,dt=[t]_0^{\ln(\sqrt{3})}=\ln(\sqrt{3})=\frac{1}{2}\ln(3)=\ln\sqrt{3}$. ■

— $I_1=\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})}\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\,dt$.

Remarquons que $f(t)=\dfrac{e^t(e^t-e^{-t})}{e^t(e^t+e^{-t})}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\dfrac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}$

Alors : $I_1=[\ln(e^t+e^{-t})]_0^{\ln(\sqrt{3})}=\ln(e^{\ln\sqrt{3}}+e^{-\ln\sqrt{3}})-\ln(e^0+e^0)$

$I_1 = \ln(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3+1}{\sqrt{3}}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) - \ln(2)$

$I_1 = \ln(4) - \ln(\sqrt{3}) - \ln(2) = 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3).$

D'où $I_1 = \ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ■

2/ **a)** Vérifier que $\forall t \in [0, \ln(\sqrt{3})] : 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$

f est croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[0, \ln(\sqrt{3})]$ et $f(0) = 0$ et $f\left(\ln(\sqrt{3})\right) = \frac{1}{2}$. Alors :

$$\forall t \in [0, \ln(\sqrt{3})] \ : \ 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$$

■

b) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(\sqrt{3})$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

D'après la question 2/a) on a : $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ En élevant à la puissance n et en intégrant :

$0 \leq (f(t))^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \implies 0 \leq \int_0^{\ln\sqrt{3}} (f(t))^n \, dt \leq \int_0^{\ln\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^n dt.$

D'où : $0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(\sqrt{3}).$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.■

3/ Montrer que $I_{n+2} = I_n - \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

Calculons $I_n - I_{n+2}$:

$I_n - I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} (f(t))^n (1 - f(t)^2) \, dt.$

Or $1 - f(t)^2 = f'(t)$. Alors $I_n - I_{n+2} = \int_0^{\ln\sqrt{3}} (f(t))^n f'(t) \, dt = \left[\dfrac{(f(t))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\ln\sqrt{3}}$

$I_n - I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}\left(\left(f(\ln\sqrt{3})\right)^{n+1} - f(0)^{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - 0.$

On en déduit : $I_{n+2} = I_n - \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$. ■

4/ Déduction des expressions de I_{2p} et I_{2p+1}

Par itération de la formule précédente (somme télescopique) :

— Pour $n = 2k-2$: $I_{2k} - I_{2k-2} = -\dfrac{1}{2k-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k-1}$. En sommant de $k = 1$ à p :

$I_{2p} = I_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{2k-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k-1}.$ ■

— Pour $n = 2k-1$: $I_{2k+1} - I_{2k-1} = -\dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$. En sommant de $k = 1$ à p :

$$I_{2p+1} = I_1 - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

■

5/ Convergence et limite de v_n

On a $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k \cdot 2^k}$.

Décomposons v_n en termes pairs et impairs :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k \cdot 2^{2k}}.$$

D'après la question 4 :

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}} = I_0 - I_{2n}$

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k \cdot 2^{2k}} = I_1 - I_{2n+1}$

Donc $v_n = (I_0 - I_{2n}) + (I_1 - I_{2n+1})$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n+1} = 0$ (d'après 2b).

La suite (v_n) converge donc vers $I_0 + I_1$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = (\frac{1}{2}\ln 3) + (\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3) = \ln(2)$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln 2$.

■

FIN