



Corrigé - Sujet 11



Exercice 1

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Calcul de u_1 et u_2

$$u_1 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

$$u_2 = \frac{u_1 - 1}{u_1 + 3} = \frac{-\frac{1}{3} - 1}{-\frac{1}{3} + 3} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = -\frac{4}{3} \times \frac{3}{8} = -\frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

2/ Étude de la suite (u_n)

a) Démonstration de $u_{n+1} + 1 = \frac{2(u_n + 1)}{3 + u_n}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 1 &= \frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1 = \frac{u_n - 1 + u_n + 3}{u_n + 3} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} \\ &= \frac{2(u_n + 1)}{3 + u_n} \end{aligned}$$

Ainsi l'égalité est bien établie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

b) Démonstration par récurrence de $u_n > -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $u_0 = 0 > -1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n > -1$, c'est-à-dire $u_n + 1 > 0$ et montrons que $u_{n+1} > -1$.

D'après la question a), on a :

$$u_{n+1} + 1 = \frac{2(u_n + 1)}{3 + u_n}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n > -1$, donc $u_n + 3 > 2 > 0$ et $2(u_n + 1) > 0$

Ainsi le quotient $\frac{2(u_n + 1)}{u_n + 3} > 0$. Donc :

$$u_{n+1} + 1 > 0 \Rightarrow u_{n+1} > -1.$$

Conclusion : Par le principe de récurrence, $u_n > -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

c) Vérification de $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 1)^2}{3 + u_n}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 3} - u_n = \frac{u_n - 1 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{u_n - 1 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} \\ &= \frac{-u_n^2 - 2u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{-(u_n + 1)^2}{3 + u_n}. \end{aligned}$$

L'égalité est établie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

d) La suite (u_n) est décroissante et convergente

— (u_n) est **Décroissance** :

D'après c), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 1)^2}{3 + u_n}.$$

D'après b), $u_n > -1$ donc $(u_n + 1)^2 > 0$ et $3 + u_n > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite (u_n) est **strictement décroissante**. ■

— (u_n) est **Convergence** :

La suite est décroissante et minorée par -1 (d'après b)). Par le théorème des suites monotones bornées, elle est convergente. ■

3/ Étude de la suite (v_n) avec $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$

a) Calcul de v_0

$$v_0 = \frac{u_0 + 2}{u_0 + 1} = \frac{0 + 2}{0 + 1} = 2.$$

b) Expression de v_{n+1} en fonction de u_n

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 2}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1} \\ &= \frac{\frac{u_n - 1 + 2(u_n + 3)}{u_n + 3}}{\frac{u_n - 1 + u_n + 3}{u_n + 3}} \\ &= \frac{u_n - 1 + 2u_n + 6}{u_n - 1 + u_n + 3} \\ &= \frac{3u_n + 5}{2u_n + 2} \\ &= \frac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)}. \end{aligned}$$

Alors :

$$v_{n+1} = \frac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)}$$

c) La suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)} - \frac{u_n + 2}{u_n + 1} = \frac{3u_n + 5 - 2(u_n + 2)}{2(u_n + 1)} \\ &= \frac{3u_n + 5 - 2u_n - 4}{2(u_n + 1)} = \frac{u_n + 1}{2(u_n + 1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (v_n) est bien arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

d) Expression de v_n en fonction de n

Puisque (v_n) est arithmétique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$:

$$v_n = 2 + \frac{n}{2} = \frac{n+4}{2}.$$

4/ Expression de u_n et limite

a) Vérification de $u_n = \frac{-v_n + 2}{v_n - 1}$ puis déduction de $u_n = \frac{-n}{n+2}$

— Vérification de $u_n = \frac{-v_n + 2}{v_n - 1}$:

On a $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$. Exprimons u_n en fonction de v_n :

$$v_n(u_n + 1) = u_n + 2 \implies v_n u_n - u_n = 2 - v_n \implies u_n(v_n - 1) = 2 - v_n. \text{ D'où :}$$

$$u_n = \frac{2 - v_n}{v_n - 1} = \frac{-v_n + 2}{v_n - 1}.$$

— Déduction de $u_n = \frac{-n}{n+2}$:

En substituant v_n par $\frac{n+4}{2}$:

$$u_n = \frac{\frac{n+4}{2} + 2}{\frac{n+4}{2} - 1} = \frac{\frac{-(n+4) + 4}{2}}{\frac{n+4-2}{2}} = \frac{-n}{n+2}.$$

Donc : $u_n = \frac{-n}{n+2}, (\forall n \in \mathbb{N}).$

b) Limite de u_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{-1}{1}.$$

Donc : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1}$ ■

Exercice 2

1/ Résolution dans \mathbb{R} de l'équation (E)

$$(E) : (e^x - 3)(\ln x + 2) = 0$$

Domaine de définition : $\ln x$ est défini pour $x > 0$, donc $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.

$$(e^x - 3)(\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow e^x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln x + 2 = 0$$

Cas 1 : $e^x - 3 = 0$

$$e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

Comme $\ln 3 > 0$, donc $x = \ln 3 \in \mathcal{D}$. D'où $\ln 3$ est une solution de l'équation (E)

Cas 2 : $\ln x + 2 = 0$

$$\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

Comme $e^{-2} > 0$, donc $x = e^{-2} \in \mathcal{D}$. D'où e^{-2} est une solution de l'équation (E)

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{S = \{e^{-2}, \ln 3\}}.$$
 ■

2/ Résolution dans \mathbb{R} de l'équation (E_1)

$$(E_1) : \ln^2 x - 4\ln x - 77 = 0$$

Domaine de définition : $\ln x$ est défini pour $x > 0$. Donc : $\mathcal{D} =]0, +\infty[$

Substitution : Posons $u = \ln x$. L'équation (E_1) devient :

$$(E'_1) : u^2 - 4u - 77 = 0$$

Discriminant :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-77) = 16 + 308 = 324 = 18^2$$

Racines :

$$u_1 = \frac{4+18}{2} = 11 \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{4-18}{2} = -7$$

Retour à la variable x :

$$- u = 11 \Leftrightarrow \ln x = 11 \Leftrightarrow x = e^{11}$$

$$- u = -7 \Leftrightarrow \ln x = -7 \Leftrightarrow x = e^{-7}$$

Les deux valeurs sont strictement positives, donc appartiennent au domaine de définition.

Conclusion :

$$S_1 = \{e^{-7}, e^{11}\}$$

3/ Par une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 (2x - 2) e^{2x} dx = \frac{3 - e^2}{2}$$

Intégration par parties. On pose :

$$u(x) = 2x - 2 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{2x}$$

d'où :

$$u'(x) = 2 \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_0^1 (2x - 2) e^{2x} dx = \left[(2x - 2) \cdot \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx$$

Calcul du crochet :

$$\left[(2x - 2) \cdot \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = (2 \cdot 1 - 2) \cdot \frac{e^2}{2} - (2 \cdot 0 - 2) \cdot \frac{e^0}{2} = 0 \cdot \frac{e^2}{2} - (-2) \cdot \frac{1}{2} = 0 + 1 = 1$$

Calcul de l'intégrale restante :

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$$

Résultat final :

$$\int_0^1 (2x - 2) e^{2x} dx = 1 - \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{2 - e^2 + 1}{2} = \frac{3 - e^2}{2}$$

On a bien :

$$\int_0^1 (2x - 2) e^{2x} dx = \frac{3 - e^2}{2}$$

Exercice 3

Données : Un sac contient 6 boules : 4 vertes et 2 rouges, indiscernables au toucher.

1/ Tirage simultané de 2 boules du sac

On tire simultanément 2 boules parmi 6. Le nombre de façons de choisir 2 boules parmi 6 est :

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

- a) Montrer que $p(A) = \frac{7}{15}$ et déduire $p(B)$

Événement A : « Les deux boules tirées ont la même couleur »

Les cas favorables à A sont :

- 2 boules vertes parmi 4 : $C_4^2 = 6$ façons
- 2 boules rouges parmi 2 : $C_2^2 = 1$ façon

Donc le nombre de cas favorables à la réalisation de A est $6 + 1 = 7$, et :

$$p(A) = \frac{7}{15}$$

■

Événement B : « Au moins une boule est verte »

L'événement contraire \bar{B} de B est « aucune boule n'est verte », c'est-à-dire les 2 boules sont rouges, donc :

$$p(\bar{B}) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

Donc :

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

■

- b) On répète l'expérience 3 fois de manière indépendante. On cherche la probabilité que A soit réalisé **exactement 2 fois**.

Il s'agit d'une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = p(A) = \frac{7}{15}$ soit $\mathcal{B}\left(3, \frac{7}{15}\right)$.

Notons par E l'événement « Obtenir A exactement 2 fois » .

$$P(E) = C_3^2 \left(\frac{7}{15}\right)^2 \left(1 - \frac{7}{15}\right)^1 = 3 \times \frac{49}{225} \times \frac{8}{15} = \frac{3 \times 392}{3375} = \frac{1176}{3375}$$

En simplifiant par 3 :

$$P(E) = \frac{392}{1125} \approx 0,3484$$

2/ Pièce de monnaie et variable aléatoire X

On lance une pièce équilibrée :

- Face (F) avec probabilité $\frac{1}{2}$: on tire **1 boule** du sac.
- Pile (P) avec probabilité $\frac{1}{2}$: on tire **2 boules successivement sans remise** du sac.

X = nombre de boules rouges **restantes dans le sac** après le tirage.

Le sac contient initialement 2 boules rouges.

a) Valeurs possibles de X

i) Si (F) : on tire 1 boule.

- Si la boule tirée est rouge : $X = 2 - 1 = 1$.
- Si la boule tirée est verte : $X = 2 - 0 = 2$.

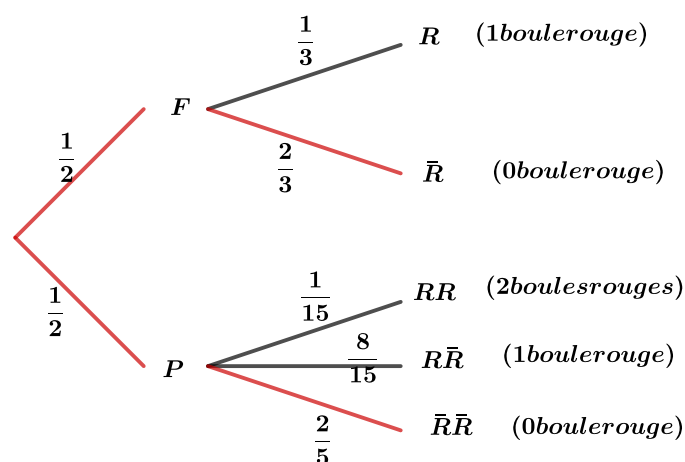
ii) Si (P) : on tire 2 boules.

- 0 rouge tirée : $X = 2$.
- 1 rouge tirée : $X = 1$.
- 2 rouges tirées : $X = 0$.

Ainsi X peut prendre les valeurs $\{0; 1; 2\}$.

b) Calcul de $p(X = 2)$

On représente cette situation par un arbre pondéré :



$X = 2$ signifie qu'aucune boule rouge n'est tirée du sac.

$$p(X = 2) = p(F) \cdot p_F(\text{boule verte}) + p(P) \cdot p_P(2 \text{ boules vertes})$$

$$p_F(\text{boule verte}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$p_P(2 \text{ boules vertes}) = \frac{A_4^2}{A_6^2} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$p(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

$$p(X = 2) = \frac{8}{15}$$

c) **Loi de probabilité de X**

Calcul de $p(X = 0)$:

($X = 0$) signifie que les 2 boules rouges sont tirées, ce qui n'est possible que lorsque l'on a obtenu la face (P). Donc :

$$p(X = 0) = p(P) \cdot p_P(2 \text{ boules rouges}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$$

Calcul de $p(X = 1)$:

Par la relation de totalité :

$$p(X = 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 2) = 1 - \frac{1}{30} - \frac{8}{15} = 1 - \frac{1}{30} - \frac{16}{30} = 1 - \frac{17}{30} = \frac{13}{30}$$

Vérification :

$$\frac{1}{30} + \frac{13}{30} + \frac{8}{15} = \frac{1}{30} + \frac{13}{30} + \frac{16}{30} = \frac{30}{30} = 1.$$

Loi de probabilité de X

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{8}{15}$

d) **Espérance mathématique de X**

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot p(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{30} + 1 \times \frac{13}{30} + 2 \times \frac{16}{30}$$

$$E(X) = 0 + \frac{13}{30} + \frac{32}{30} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$$

$$E(X) = \frac{3}{2}$$

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 8 - \frac{8}{x} - 4\ln(x)$$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Calcul de limites en $+\infty$:

— Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(8 - \frac{8}{x} - 4\ln(x) \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, alors par somme des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

— Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{x} - \frac{8}{x^2} - 4\frac{\ln(x)}{x} \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée), et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^2} = 0$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

b) Branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$:

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on en déduit que la courbe (C) admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses** au voisinage de $+\infty$.

c) Vérifier que $f(x) = 4\left(\frac{2x - 2x \ln x}{x}\right)$ et déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{2x - 2 - x \ln(x)}{x}\right) &= \frac{8x - 8 - 4x \ln(x)}{x} \\ &= \frac{8x}{x} - \frac{8}{x} - \frac{4x \ln(x)}{x} = 8 - \frac{8}{x} - 4 \ln(x) = f(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = 4\left(\frac{2x - 2 - x \ln x}{x}\right)$$

Calcul de la limite en 0^+ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 4\left(\frac{2x - 2 - x \ln(x)}{x}\right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$. Alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2x - 2 - x \ln(x)) = -2$. D'où par quotient,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

Interprétation géométrique : La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une **asymptote verticale** à la courbe (C).

2/ a) Montrons que : $f'(x) = 4\left(\frac{2-x}{x^2}\right)$:

La fonction f est dérivable sur I . Pour tout $x \in I$ on a :

$$f'(x) = 0 - 8\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x}$$

En mettant au même dénominateur x^2 :

$$f'(x) = \frac{8 - 4x}{x^2} = 4\left(\frac{2 - x}{x^2}\right)$$

b) Étude des variations de f :

Pour tout $x \in I$, $x^2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de $2 - x$.

— $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

— $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 2[$. Alors f est strictement croissante sur $]0, 2[$

— $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[$. Alors f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$

Valeur exacte de $f(2)$:

$$f(2) = 8 - \frac{8}{2} - 4\ln(2) = 8 - 4 - 4\ln(2) = 4 - 4\ln(2)$$

Tableau de variation de f :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(2) = 4(1 - \ln 2)$	$-\infty$

c) Montrons que : $f''(x) = 4\left(\frac{x-4}{x^3}\right)$:

On a : $f'(x) = 8x^{-2} - 4x^{-1}$. Donc :

$$f''(x) = 8(-2x^{-3}) - 4(-1x^{-2}) = -\frac{16}{x^3} + \frac{4}{x^2}$$

Mise au même dénominateur x^3 :

$$f''(x) = \frac{-16 + 4x}{x^3} = \frac{4(x-4)}{x^3}$$

d) Concavité de (C) et point d'inflexion :

Le signe de $f''(x)$ dépend de $x-4$ car $x^3 > 0$ sur I .

— $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

— $f''(x) < 0$ sur $]0, 4[$: la courbe (C) est **concave** sur l'intervalle $]0, 4[$

— $f''(x) > 0$ sur $]4, +\infty[$: la courbe (C) est **convexe** sur l'intervalle $[4, +\infty[$.

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $x = 4$. Le point de coordonnées et $f''(4) = 0$, alors le point de coordonnées $(4, f(4))$ est un **point d'inflexion** où $f(4) = 8 - \frac{8}{4} - 4\ln(4) = 6 - 8\ln(2)$. ■

3/ a) Équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1 :

L'équation de la tangente à la courbe (C) au point $(1, 0)$ est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

Comme $f(1) = 8 - 8 - 4\ln(1) = 0$ et $f'(1) = 4\left(\frac{2-1}{1^2}\right) = 4$.

Alors l'équation de la tangente à la courbe (C) au point $(1, 0)$ est :(T) : $y = 4(x - 1) + 0$. Soit :

$$y = 4x - 4$$

- b) L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]4.9; 5[$:
 Sur l'intervalle $[4.9; 5]$, la fonction f est continue et strictement décroissante, et on a :

$$f(4.9) \approx 0.012 \quad \text{donc} \quad f(4.9) > 0$$

$$f(5) = 6.4 - 4\ln(5) \approx -0.036 \quad \text{donc} \quad f(5) < 0$$

Puisque $f(4.9) \times f(5) < 0$, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]4.9; 5[$.

4/ Lecture graphique (Figure 1) :

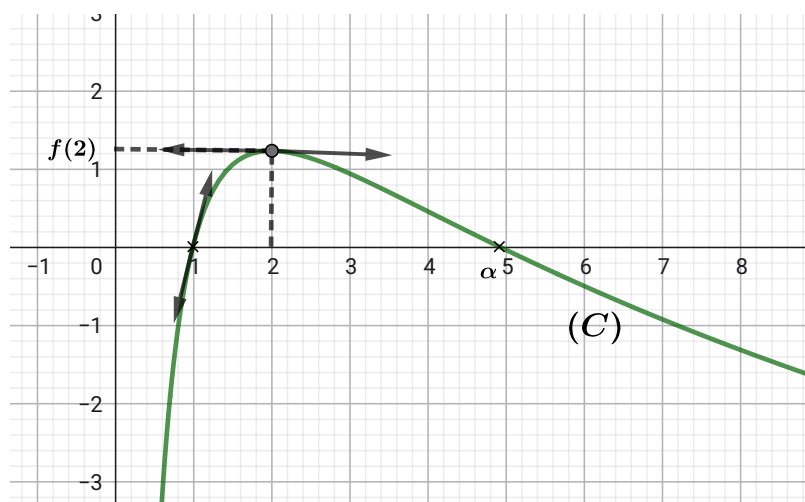


FIGURE 1 –

a) Résolution de $f(x) = 0$:

Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses. Donc

$$S = \{1; \alpha\}$$

b) Tableau de signes de f sur I :

- $f(x) < 0$ sur $]0, 1[\cup]\alpha, +\infty[$ (la courbe est sous l'axe (Ox))
- $f(x) > 0$ sur $]1, \alpha[$ (la courbe est au-dessus de l'axe (Ox))
- $f(x) = 0$ pour $x \in \{1; \alpha\}$

x	0	1	α	$+\infty$	
<i>signe de $f(x)$</i>	-	0	+	0	-

c) Image de l'intervalle $[1; 2]$ par f :

Sur l'intervalle $[1; 2]$, f est continue et strictement croissante. ■

$$f([1; 2]) = [f(1); f(2)] = [0; 4 - 4\ln(2)]$$

d) Nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2022$: ■

La droite d'équation $y = -2022$ est une droite horizontale située largement en dessous de l'axe des abscisses. Le maximum de la fonction est $f(2)$ (qui est positif) et les limites en 0^+ et $+\infty$ sont $-\infty$. La droite horizontale va donc couper la courbe (C) exactement en deux points (un sur la branche croissante et un sur la branche décroissante).

Il y a donc **2 solutions**. ■



FIN