



Corrigé - Sujet 11



Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{8}{5}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{5u_n + 11}$.

1/ Calcul de u_1

En remplaçant n par 0 dans la formule de récurrence :

$$u_1 = \frac{3u_0}{5u_0 + 11} = \frac{3\left(\frac{8}{5}\right)}{5\left(\frac{8}{5}\right) + 11} = \frac{\frac{24}{5}}{8 + 11} = \frac{24}{5 \times 19} = \frac{24}{95}$$

2/ Montrons par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- * **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{8}{5}$, donc $u_0 > 0$. La propriété est vraie au rang 0.
- * **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, donc $3u_n > 0$ et $5u_n + 11 > 11 > 0$. Donc $\frac{3u_n}{5u_n + 11} > 0$, alors $u_{n+1} > 0$
- * **Conclusion** : Par le principe de récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3/ Étude de la convergence

- a) Montrer que : $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{11}u_n$ et en déduire que : $0 < u_n \leq \frac{8}{5}\left(\frac{3}{11}\right)^n$

Puisque $u_n > 0$ (d'après 2/), alors $5u_n + 11 > 11$. En passant à l'inverse : $\frac{1}{5u_n + 11} < \frac{1}{11}$. En multipliant par $3u_n$ (qui est positif) :

$$\frac{3u_n}{5u_n + 11} < \frac{3u_n}{11} \implies u_{n+1} \leq \frac{3}{11}u_n$$

Comme $u_{n+1} > 0$, on a bien $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{11}u_n$.

En appliquant l'inégalité précédente successivement, on a :

$$u_n \leq \left(\frac{3}{11}\right)u_{n-1} \leq \left(\frac{3}{11}\right)^2 u_{n-2} \leq \dots \leq \left(\frac{3}{11}\right)^n u_0$$

D'où : $0 < u_n \leq \frac{8}{5}\left(\frac{3}{11}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Limite de u_n :

Comme $-1 < \frac{3}{11} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{11}\right)^n = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. ■

4/ Suite auxiliaire (v_n) : $v_n = \frac{5u_n}{5u_n + 8}$

a) (v_n) Suite géométrique :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{5u_{n+1}}{5u_{n+1} + 8} = \frac{5\left(\frac{3u_n}{5u_n + 11}\right)}{5\left(\frac{3u_n}{5u_n + 11}\right) + 8} = \frac{\frac{15u_n}{5u_n + 11}}{\frac{15u_n + 8(5u_n + 11)}{5u_n + 11}} \\ &= \frac{15u_n}{15u_n + 40u_n + 88} = \frac{15u_n}{55u_n + 88} = \frac{3 \times 5u_n}{11(5u_n + 8)} = \frac{3}{11}v_n \end{aligned}$$

Alors : (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{11}$. ■

b) Expression de v_n et u_n en fonction de n :

— $v_0 = \frac{5(8/5)}{5(8/5) + 8} = \frac{8}{8 + 8} = \frac{1}{2}$. Donc :

$$v_n = v_0 \cdot q^n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{11}\right)^n$$

— Pour u_n : $v_n = \frac{5u_n}{5u_n + 8} \Rightarrow v_n(5u_n + 8) = 5u_n \Rightarrow 5u_nv_n + 8v_n = 5u_n \Rightarrow 8v_n = u_n(5 - 5v_n)$.

D'où $u_n = \frac{8v_n}{5(1 - v_n)}$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{8}{5} \cdot \frac{\left(\frac{3}{11}\right)^n}{2 - \left(\frac{3}{11}\right)^n}$$

Exercice 2

Données : Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules vertes (soit 7 boules au total). On tire simultanément 2 boules au hasard.

Le nombre total de façons de tirer 2 boules parmi 7, simultanément, est :

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

1/ Soit les événements :

A : les deux boules tirées sont de même couleur

B : parmi les deux boules tirées, il y en a au moins une rouge

a) Montrer que $p(A) = \frac{5}{21}$

Les tirages favorables à A sont ceux où les 2 boules sont de même couleur, on note : $A = \{BB; RR; VV\}$

— 2 boules blanches parmi 2 : $C_2^2 = 1$

— 2 boules rouges parmi 3 : $C_3^2 = 3$

— 2 boules vertes parmi 2 : $C_2^2 = 1$

Donc $\text{card}(A) = 1 + 3 + 1 = 5$. D'où :

$$p(A) = \frac{5}{21}$$

b) Calculer $p(B)$

On calcule $p(B)$ par complémentarité. L'événement contraire de B peut être noté par : $\bar{B} = \{\bar{R}; \bar{R}\}$.

Donc $\text{card}(\bar{B}) = C_4^2 = 6$.

Donc $p(\bar{B}) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

Alors : $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$. D'où :

$$p(B) = \frac{5}{7}$$

c) Montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{7}$

L'événement $A \cap B$ correspond aux tirages où les 2 boules sont de même couleur et où il y a au moins une boule rouge. Cela signifie donc que les 2 boules sont toutes les deux rouges, donc : $A \cap B = \{RR\}$. Donc $\text{card}(A \cap B) = C_3^2 = 3$. Par suite

$$p(A \cap B) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

d) A et B sont-ils indépendants?

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Calculons $p(A) \times p(B) = \frac{5}{21} \times \frac{5}{7} = \frac{25}{147}$

$$\text{Or : } p(A \cap B) = \frac{1}{7} = \frac{21}{147}$$

Comme $\frac{25}{147} \neq \frac{21}{147}$, alors $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$.

Alors A et B ne sont **pas indépendants**. ■

2/ Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

a) Valeurs de X et calcul de $p(X = 2)$

* Valeurs de X

Puisqu'on tire 2 boules et qu'il y a 3 boules rouges, X peut prendre les valeurs : 0; 1; 2. Alors :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

* Calcul de $p(X = 2)$:

Les 2 boules tirées sont toutes les deux rouges signifie que $(X = 2) = \{RR\}$. Donc :

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}$$

D'où :

$$p(X = 2) = \frac{1}{7}$$

b) Loi de probabilité de X et espérance $E(X)$

* Calcul de $p(X = 0)$:

N'obtenir Aucune boule rouge signifie que $(X = 0) = \{\bar{R}\bar{R}\}$. Donc :

$$p(X = 0) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

* Calcul de $p(X = 1)$:

Obtenir Une boule rouge parmi 3, et une boule non-rouge parmi 4 signifie que $(X = 1) = \{R\bar{R}\}$. Donc :

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2} = \frac{3 \times 4}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

* **Tableau de la loi de probabilité de X :**

On a : $p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1$. D'où :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

* **Calcul de l'espérance $E(X)$:**

$$E(X) = \sum x_i \times p(X = x_i) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = 0 + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

D'où :

$$E(X) = \frac{6}{7}$$

■

Exercice 3

On considère dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{6})z + 16 = 0$$

1/ a) **Calcul du discriminant Δ**

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 1$, $b = -2(\sqrt{2} - \sqrt{6})$, $c = 16$:

$$\Delta = [-2(\sqrt{2} - \sqrt{6})]^2 - 4 \times 16 = 4(\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 - 64$$

Comme $(\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 = 2 - 2\sqrt{12} + 6 = 8 - 4\sqrt{3}$, alors :

$$\Delta = 4(8 - 4\sqrt{3}) - 64 = 32 - 16\sqrt{3} - 64 = -32 - 16\sqrt{3} \text{ d'une part.}$$

D'autres parts :

$$-4(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = -4((\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2) = -4(8 + 4\sqrt{3}) = -32 - 16\sqrt{3}$$

On obtient bien :

$$\Delta = -4(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$$

b) **Solutions de (E)**

Puisque $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes distinctes conjuguées. On a :

$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{4(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})i$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{6}) - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})i}{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) - (\sqrt{2} + \sqrt{6})i$$

et

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})i}{2} = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) + (\sqrt{2} + \sqrt{6})i$$

Donc :

$$z_1 = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) - (\sqrt{2} + \sqrt{6})i \quad \text{et} \quad z_2 = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) + (\sqrt{2} + \sqrt{6})i$$

2/ On pose $a = \sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$, $c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

a) **Vérification de $4b = ac$**

Calculons ac :

$$\begin{aligned} ac &= (\sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6}))(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})) - i\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})) \\ &= \sqrt{2}[(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + i(\sqrt{2} + \sqrt{6}) - i(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + (\sqrt{2} + \sqrt{6})] \\ &= \sqrt{2}[(2\sqrt{2}) + i(2\sqrt{6})] \\ &= 4 + 2i\sqrt{12} \\ &= 4 + 4i\sqrt{3} = 4(1 + i\sqrt{3}) = 4b \end{aligned}$$

D'où :

$$4b = ac$$

b) **Forme trigonométrique de b et c**

Pour $b = 1 + i\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} |b| &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \cos \theta &= \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \arg(b) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$b = \left[2, \frac{\pi}{3} \right] = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Pour $c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} |c| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \\ \cos \theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \implies \arg(c) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$c = \left[2, -\frac{\pi}{4} \right] = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

c) **Déduction de la forme trigonométrique de a**

De $4b = ac$, on tire $a = \frac{4b}{c}$. Donc :

$$|a| = \frac{4|b|}{|c|} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

$$\arg(a) = \arg(4b) - \arg(c) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + 3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$a = \left[4, \frac{7\pi}{12}\right] = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right)$$

3/ On considère les points B, C, D d'affixes respectives $b, c, d = a^4$ dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

La rotation R est de centre O et d'angle $\frac{7\pi}{12}$.

On pose $M'(z') = R(M(z))$

a) Vérification de $z' = \frac{1}{4}az$

La rotation R de centre O et d'angle $\theta = \frac{7\pi}{12}$ est donnée par :

$$z' = e^{i\theta} \cdot z = \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right)z$$

Or $a = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right)$, donc $e^{i7\pi/12} = \frac{a}{4}$.

Ainsi :

$$z' = \frac{a}{4}z = \frac{1}{4}az$$

b) Image du point C par R

L'affixe de C' l'image de C (d'affixe c) est :

$$c' = \frac{1}{4}ac = \frac{4b}{4} = b$$

Donc l'image de C par la rotation R est le point B . i.e. : $R(C) = B$.

c) Nature du triangle OBC

On a $|b| = 2$ et $|c| = 2$, donc $OB = OC = 2$.

De plus, B est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{7\pi}{12}$, ce

qui confirme $OB = OC$ et l'angle $\widehat{BOC} = \frac{7\pi}{12}$.

Le triangle OBC est donc **isocèle en O** .

d) $a^4 = 128b$ et alignement de O, B, D

Calcul de a^4 :

$|a| = 4$ et $\arg(a) = \frac{7\pi}{12}$, donc $a = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right)$. Donc :

$$a^4 = 4^4 \left(\cos \frac{28\pi}{12} + i \sin \frac{28\pi}{12}\right) = 256 \left(\cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3}\right)$$

Or $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, donc $\cos \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$a^4 = 256 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 128(1 + i\sqrt{3}) = 128b$$

Ainsi :

$$a^4 = 128b$$

Alignement des points O, B et D :

L'affixe de D est $d = a^4 = 128b$.

Puisque $d = 128b$, on a $d = 128 \cdot b$, soit $\frac{d-0}{b-0} = 128$ donc $\frac{d}{b} \in \mathbb{R}^+$. Cela signifie que O, B et D sont alignés.

Par conséquent, **les points O, B et D sont alignés.** ■

Exercice 4

Première partie

On considère g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -x + (2 - x) \ln x.$$

1/ Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

Limite en 0^+ . On écrit $g(x) = -x + 2 \ln x - x \ln x$.

$$\text{--- } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -x = 0.$$

$$\text{--- } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \ln x = -\infty.$$

$$\text{--- } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -x \ln x = 0.$$

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-x) + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 \ln x) - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln x) = 0 - \infty - 0 = -\infty$, soit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty.$$

Limite en $+\infty$. On écrit $g(x) = -x + (2 - x)\ln x$. Pour $x > e^2$, on a $2 - x < 0$ et $\ln x > 0$, donc $(2 - x)\ln x \rightarrow -\infty$, et $-x \rightarrow -\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

2/ Dérivée et variations de g

a) Expression de $g'(x)$.

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = -1 + (-1)\ln x + (2-x) \cdot \frac{1}{x} = -1 - \ln x + \frac{2}{x} - 1 = \frac{2}{x} - 2 - \ln x = 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) - \ln x.$$

$$g'(x) = 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) - \ln x, \quad \forall x \in]0; +\infty[.$$

b) g strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. Pour $x \geq 1$:

$$- x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq 0.$$

$$- x \geq 1 \Rightarrow \ln x \geq 0.$$

Donc $g'(x) = 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) - \ln x \leq 0 + 0 = 0$ sur $[1; +\infty[$, avec égalité seulement en $x = 1$.

$$g'(x) \leq 0 \text{ sur } [1; +\infty[\Rightarrow \boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } [1; +\infty[.}$$

c) g strictement croissante sur $]0; 1]$. Pour $0 < x \leq 1$:

$$- x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 \geq 0.$$

$$- 0 < x \leq 1 \Rightarrow \ln x \leq 0.$$

Donc $g'(x) = 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) - \ln x \geq 0$ sur $]0; 1]$.

$$g'(x) \geq 0 \text{ sur }]0; 1] \Rightarrow \boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]0; 1].}$$

d) Tableau de variations de g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$	$-\infty$	$g(1)$	$-\infty$

3/ Calculer $g(1)$

On a : $g(1) = -1 + (2 - 1)\ln 1 = -1 + 1 \cdot 0 = -1$. Donc

$$g(1) = -1$$

4/ Dédurre que $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

D'après le tableau de variations, g atteint son maximum en $x = 1$ et ce maximum vaut $g(1) = -1 < 0$.

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) \leq g(1) = -1 < 0$. D'où :

$$g(x) < 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Deuxième partie

On considère f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -x \ln x + \ln^2 x,$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ Limites et branches infinies

a) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter ce résultat géométriquement

Effectuons le changement de variables suivant $t = -\ln x$ (donc $t \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, et $x = e^{-t}$). Alors :

$$f(x) = -e^{-t}(-t) + t^2 = te^{-t} + t^2.$$

Comme $te^{-t} \rightarrow 0$ et $t^2 \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty$. D'où :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} + t^2 = 0 + \infty = +\infty. \text{ Ainsi :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$$

Interprétation géométrique : La courbe (C) admet la droite $x = 0$ (axe des ordonnées) comme asymptote verticale.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et branche infinie de (C) en $+\infty$.

On factorise par $\ln^2 x$ pour $x > 1$:

$$f(x) = x \ln x \left(-1 + \frac{\ln x}{x} \right).$$

Comme $x \ln x \rightarrow +\infty$ et $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.}$$

Branche parabolique : Soit $x > 0$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \ln x \left(-1 + \frac{\ln x}{x} \right)$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$$

Alors la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées. ■

2/ Dérivée et monotonie de f

a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} + 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \\ &= -\ln x - 1 + \frac{2 \ln x}{x} \\ &= \frac{-x \ln x - x + 2 \ln x}{x} \\ &= \frac{-x + (2 - x) \ln x}{x} \\ &= \frac{g(x)}{x}. \end{aligned}$$

. D'où :

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad (\forall x \in]0, +\infty[)}$$

b) Dédire que f strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

D'après la partie 1 question 4, $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. De plus $x > 0$, donc :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x} < 0 \quad \text{sur }]0; +\infty[.$$

Alors f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. ■

c) Tableau de variations de f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3/ Tangente en $A(1;0)$ et position relative de (C) et (D)

a) Tangente (D) en $A(1;0)$ est $y = -x + 1$. L'équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point $A(1,0)$ est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

Comme $f(1) = -1 \cdot 0 + 0^2 = 0 : A(1;0) \in (C)$.

et $f'(1) = \frac{g(1)}{1} = -1$.

Alors l'équation de la tangente (D) est :

$$y = -x + 1.$$

b) Vérification de l'égalité : $f(x) - y = (-1 + \ln x)(1 - x + \ln x)$

Soit $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x) - y = f(x) - (-x + 1) = -x \ln x + \ln^2 x + x - 1$.

et on a $(\ln x - 1)(-x + \ln x + 1) = -x \ln x + \ln^2 x + \ln x + x - \ln x - 1 = -x \ln x + \ln^2 x + x - 1$.

Par comparaison, on a :

$$f(x) - y = (-1 + \ln x)(1 - x + \ln x)$$

c) Position de (C) par rapport à (D) .

— Pour $x \in]0; e[: \ln x < 1 \Rightarrow \ln x - 1 < 0$

en posant $h(x) = \ln x - x + 1$.

à partir de la courbe (C_h) on constate que $h(1) = 0$ et pour tout

$x \in]0, e[; h(x) \leq 0$

Ainsi $f(x) - y = \underbrace{(\ln x - 1)}_{<0} \underbrace{(-x + \ln x + 1)}_{\leq 0} \geq 0$ pour tout $x \in]0, e[$.

D'où : (C) est au-dessus de (D) sur $]0; e[$.

— Pour $x \in]e; +\infty[: \ln x > 1 \Rightarrow \ln x - 1 > 0$ et la courbe (C_h) est en dessous de l'axe des abscisses, donc $h(x) \leq 0$ pour tout $x \in]e; +\infty[$.

$$\text{Donc } f(x) - y(\underbrace{\ln x - 1}_{>0})(\underbrace{-x + \ln x + 1}_{\leq 0}) \leq 0 : (C) \text{ est en dessous de } (D)$$

sur $]e; +\infty[$. ■

— Pour $x = 1$ ou $x = e$ on a $f(x) - y = 0$. Donc la courbe (C) et la droite (D) se coupent aux points d'abscisses 1 et e . ■

4/ Construction de (C) et (D)

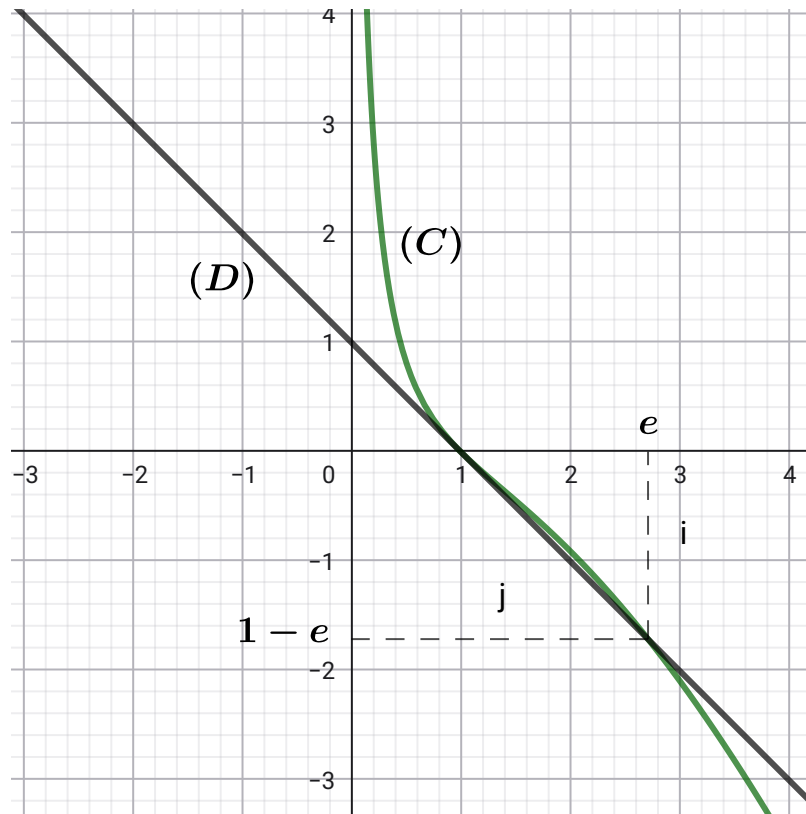


FIGURE 1 – Courbe (C)

5/ Fonction réciproque de $T = f|_{]0;1]}$

a) T admet une réciproque sur un intervalle J .

La fonction T est la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]0, 1]$, donc T est continue et strictement décroissante sur $]0; 1]$. On a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} T(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad T(1) = f(1) = 0$$

Donc T réalise une bijection de $]0; 1]$ sur $J = [0; +\infty[$.

T^{-1} est définie sur $J = [0; +\infty[$. ■

b) Montrer que T^{-1} est dérivable en 0.

On a $T(1) = 0$ donc $T^{-1}(0) = 1$ et $T'(1) = f'(1) = -1$ donc $T'(1) \neq 0$.
Alors T^{-1} est dérivable en 0, et on a :

$$(T^{-1})'(0) = \frac{1}{T'(T^{-1}(0))} = \frac{1}{T'(1)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

D'où T^{-1} est dérivable en 0 et $(T^{-1})'(0) = -1$. ■

Troisième partie

1/ Calcul de $\int_1^e x \ln x dx$ par parties

On pose $u = \ln x$, $v' = x$, donc $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

2/ Primitive de $x \mapsto \ln^2 x$

Posons $K(x) = x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)$. La fonction K est dérivable sur $]0; +\infty[$.
Soit $x > 0$ On a :

$$K'(x) = \ln^2 x - 2 \ln x + 2 + x \left(2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \right) = \ln^2 x - 2 \ln x + 2 + 2 \ln x - 2 = \ln^2 x.$$

$$K'(x) = \ln^2 x.$$

Alors : K est donc bien une primitive de $x \mapsto \ln^2 x$ sur $]0; +\infty[$. ■

3/ Calcul de $\int_1^e \ln^2 x dx$

$$\int_1^e \ln^2 x dx = \left[x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) \right]_1^e = e(1 - 2 + 2) - 1(0 - 0 + 2) = e \cdot 1 - 2 = e - 2.$$

$$\int_1^e \ln^2 x dx = e - 2$$

4/ Aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Sur $[1; e]$, on a $f(1) = 0$ et $f(e) = -e \ln e + \ln^2 e = -e + 1 < 0$, et f est décroissante, donc $f(x) \leq 0$ sur $[1; e]$. L'aire vaut : $\mathcal{A} = \left(\int_1^e |f(x)| dx \right) u.a.$

$$\int_1^e |f(x)| dx = - \int_1^e f(x) dx = - \int_1^e (-x \ln x + \ln^2 x) dx = \int_1^e x \ln x dx - \int_1^e \ln^2 x dx$$

En utilisant les résultats des questions 1 et 3 :

$$\mathcal{A} = \frac{e^2 + 1}{4} - (e - 2) = \frac{e^2 + 1}{4} - e + 2 = \frac{e^2 + 1 - 4e + 8}{4} = \frac{e^2 - 4e + 9}{4}.$$

L'unité graphique étant $u.a. = 4cm^2$, donc :

$$\boxed{\mathcal{A} = (e^2 - 4e + 9) cm^2.}$$

■

FIN