Série 1 : Généralités sur les fonctions

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 5x^2 - 7x + 11$; $f_2(x) = \sqrt{3}x - \dfrac{2}{3}$;

$f_3(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $f_4(x) = \dfrac{5x+1}{x+5}$;

$f_5(x) = \dfrac{x^2}{(x+2)(x-3)}$; $f_6(x) = \dfrac{1-2x}{x^2-x-6}$;

$f_7(x) = \dfrac{-x+6}{(x^2-4)(9x^2+6x+1)}$; $f_8(x) = \sqrt{x-2}$;.

$f_9(x) = \dfrac{3x+2}{\sqrt{5-x}}$; $f_{10}(x) = \sqrt{(2x-1)(3-x)}$;

$f_{11}(x) = \sqrt{5x^2+3x-2}$; $f_{12}(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{2x+1}}$;

$f_{13}(x) = \sqrt{x-5} + 2\sqrt{x+1}$; $f_{14}(x) = \dfrac{2x-3}{2+\sin x}$.

$f_{15}(x) = \dfrac{2x-3}{|x-1|+2}$; $f_{16}(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}$;

$f_{17}(x) = \dfrac{1+2\cos x}{1-2\sin x}$; $f_{18}(x) = \dfrac{x+1}{1-\cos^2 x}$.

Exercice 2

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

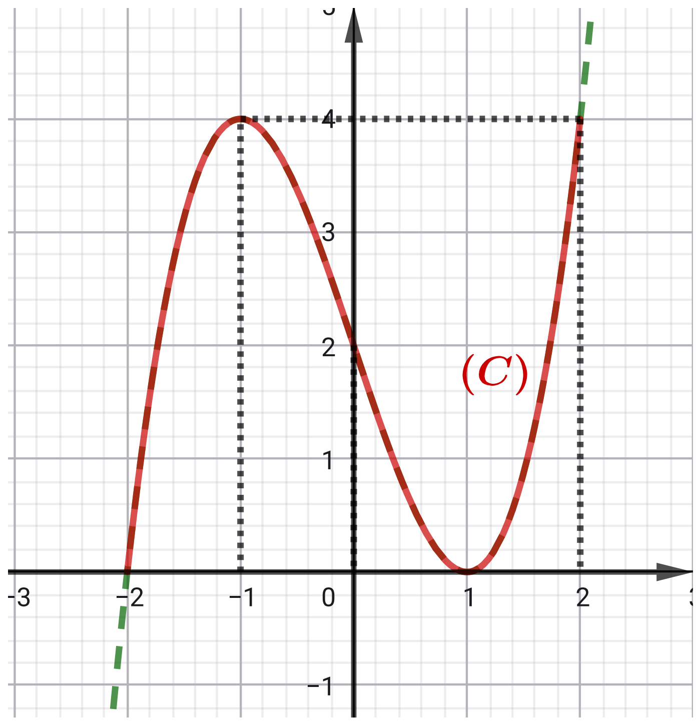
$g_1(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $g_2(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$; $g_3(x) = x^2 + x + 1$;

$g_4(x) = |3x| + 2x^2$; $g_5(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; $g_6(x) = \sqrt{x} + x^2$;

$g_7(x) = \dfrac{3x}{2-|x|}$; $g_8(x) = \cos x + x\sin x$; $g_9(x) = |x+1|$;

Exercice 3

La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2, 2]$.



1/ **a)** Déterminer graphiquement les images par la fonction f des nombres -2 , 0 et 1.

b) Déterminer graphiquement les antécédents éventuels par f de 4 et 0.

2/ Dresser le tableau de variation de f sur $[-2,2]$.

3/ Résoudre graphiquement dans $[-2,2]$ les inéquations suivantes : $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ et $f(x) > 2$.

Exercice 4

Le tableau ci-dessous est le tableau de variation d'une fonction f :

x	-4		-1		2		4
$f(x)$	5	↘	-2	↗	0	↘	-3

1/ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2/ Donner un encadrement de $f(0)$ par deux entiers.

3/ Donner un antécédent de -2. -2 a-t-il d'autres antécédents dans $[-4,4]$?.

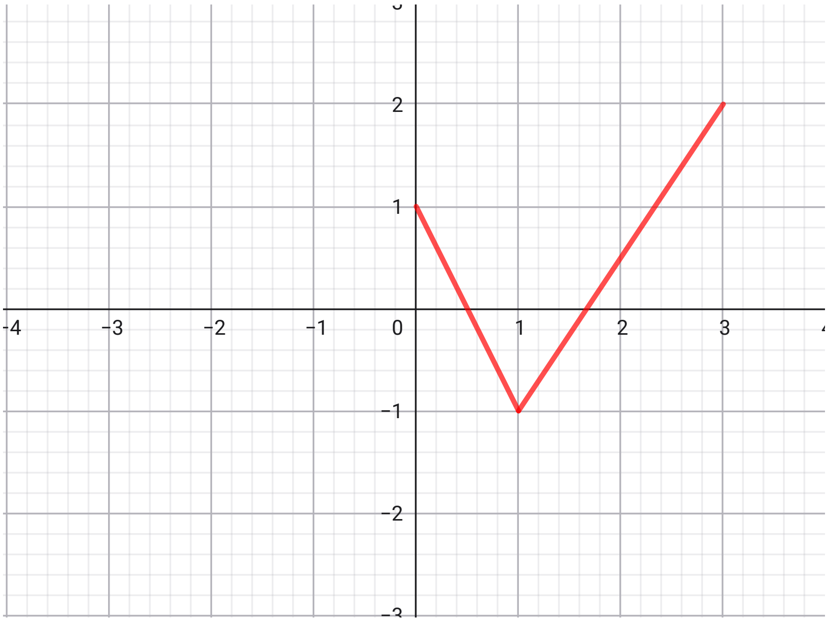
4/ Combien le nombre 0 a-t-il d'antécédents dans $[-4,4]$?.

5/ Combien le nombre 3 a-t-il d'antécédents dans $[-4,4]$?.

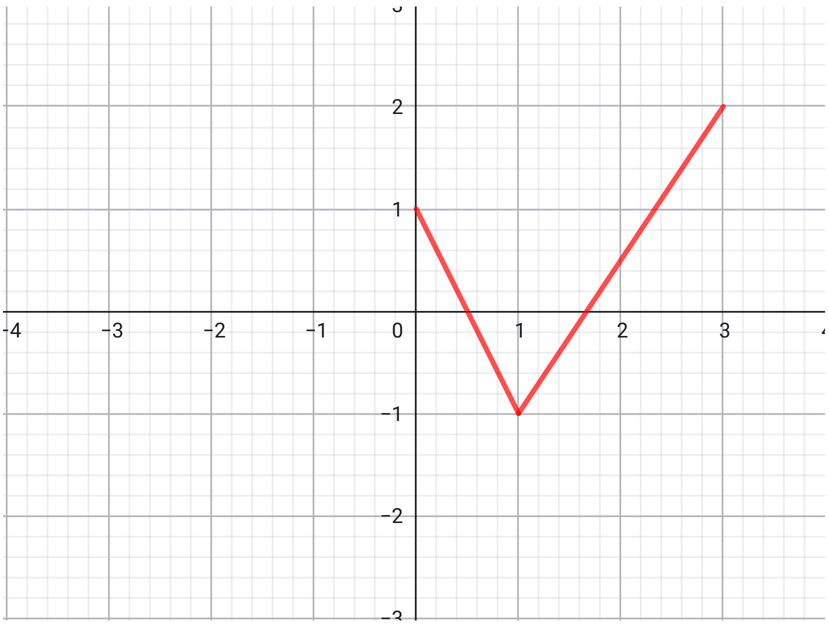
Exercice 5

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3,3]$ dont la courbe représentative sur $[0,3]$. Compléter la courbe sur $[-3,0]$ dans chacun des cas suivants :

1/ f est paire.



2/ f est impaire



Exercice 6

Les fonctions f et g sont elles égales dans chacun des cas suivants :?

1/ $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x) = \dfrac{1+3x^2}{|x|}$.

2/ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ et $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -x^2 + 2x$.

1/ Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2/ Montrer que 1 est un maximum de f sur D_f.

3/ Montrer que pour tous les nombres distincts a et b de D_f, on a :
$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 2 - a - b$.

4/ Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 1]$ et $[1, +\infty[$.

5/ Dresser le tableau de variation de f sur D_f.

Exercice 8

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

1/ Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2/ Montrer que f est impaire.

3/ Montrer que si a et b sont deux nombres réels distincts non nuls, alors :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1 - \frac{4}{ba}$$

4/ Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $]0, 2]$ et $[2 ; +\infty[$.

5/ En déduire les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -2]$ et $[-2, 0[$.

6/ Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer $f(1)$ et $f(-3)$.

2/ Déterminer la nature de la courbe (C_f) et préciser ses éléments caractéristiques.

3/ Montrer que pour tout a et b dans $\mathbb{R}$: $T(a, b) = a + b + 2$.

4/ Déterminer les variations de f sur les intervalles $]-\infty, -1]$ et $[-1, +\infty[$.

5/ Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

6/ **a)** Tracer la courbe (C_f).

b) Tracer dans le même repère la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = |f(x)|$.

c) Tracer dans le même repère la courbe de la fonction h définie par : $h(x) = f(|x|)$.

7/ Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.

8/ Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2/ Vérifier que pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

3/ Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.

4/ Étudier les variations de f sur les intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$.

5/ Dresser son tableau de variation de f.

6/ Déterminer la nature de la courbe (C_f) et préciser ses éléments caractéristiques.

7/ Tracer la courbe (C_f).

Exercice 11

Soient f et g les deux fonctions numériques définies par :

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

et (C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives de f et g dans un même repère.

1/ Dresser le Tableau de variations de f et de g

2/ **a)** Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

3/ Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

4/ **a)** Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

Exercice 12

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{3x-3}{x+1}$.

1/ Déterminer D_g et vérifier que pour tout x de D_g : $g(x) = 3 - \dfrac{6}{x+1}$.

2/ Donner les tableaux de variations de f et g

3/ Déterminer les points d'intersection de $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ avec les axes du repère.

4/ Tracer les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ dans le même repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5/ Déterminer algébriquement les points d'intersection de $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$.

6/ Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

7/ Soit h la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{3|x|-3}{|x|+1}$.

- **a)** Déterminer D_h.
- **b)** Montrer que la fonction h est paire.
- **c)** Vérifier que $h(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.
- **d)** Tracer la courbe (C_h) dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

8/ Soit k la fonction définie par : $k(x) = |f(x)|$.

- **a)** Tracer la courbe (C_k) dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
- **b)** Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $k(x) = m$.

Exercice 13

Soit f la fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f(x) = 2x - 6 \; ; \; x \geq 2 \\ f(x) = 3x + 4 \; ; \; -2 \leq x < 0 \end{cases}$

1/ Calculer $f(3)$; $f(2)$; $f(0)$ et $f(-2)$.

2/ Construire la courbe représentative de f sur les deux intervalles $[2, +\infty[$ et $[-2, 0]$.

3/ Calculer $f(-3)$ et $f(1)$.

4/ Construire la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Soit f une fonction numérique telle que : $f(x) = x|x| - 4x$

1/ Étudier la parité de f.

2/ **a)** Montrer que le taux de variation T est :

$$T = a + b - 4 \quad \text{, pour tout } a, b \in [0, +\infty[\ / a \neq b$$

b) Étudier la monotonie de f sur $[0,2[$ et $]2,+\infty[$, et puis déduire la monotonie sur $]-2,0]$ et $]-\infty,2[$.

c) Dresser le tableau de variation.

3/ Déterminer les extremums de f.

Le fondement de la théorie c'est la pratique. (Mao Tsé-Toung)