

□□□□ **Série 2 : Arithmétique** □□□□

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

- 1/ Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de -2021 par 120 .
- 2/ Déterminer tous les entiers naturels dont le carré divise 720 .
- 3/ Soit n un entier naturel impair, montrer que $8 \mid (n^2 - 1)$.
- 4/ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : n \wedge (n + 1) = 1$.
- 5/ Déterminer les valeurs de l'entier relatif n tel que $n \mid (2n + 9)$.
- 6/ Le reste de la division euclidienne de a par 11 est 8 , et le reste de la division euclidienne de b par 11 est 2 . Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres $a + b$, ab et a^2 par 11 .
- 7/ Calculer $a \wedge b$ et $a \vee b$ avec $a = 1414$ et $b = 666$.
- 8/ $n = p^3 q^2$ avec p et q deux nombres premiers. Déterminer le nombre de diviseurs de n dans \mathbb{N} et déterminer ces diviseurs.
- 9/ a et b deux entiers naturels, montrer que $a + b$ et $a - b$ ont même parité, puis résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation $a^2 = b^2 + 32$.
- 10/ $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, montrer que $a \wedge (a + b) = a \wedge b$.
- 11/ $(a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}$, montrer que $c \mid ab \Rightarrow c \mid (a \wedge c)(b \wedge c)$.

Exercice 2

Soient n et m deux entiers naturels non nuls. On pose $a = 11m + 2n$ et $b = 18m + 5n$.

- 1/ a) Calculer $7a + b$ en fonction de n et m .
 b) Montrer que $19 \mid a \Rightarrow 19 \mid b$.
- 2/ On pose $d = a \wedge b$.
 Montrer que $m \wedge n = 1 \Rightarrow d \mid 19$.

Exercice 3

- 1/ Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, les équations ; $\bar{2}x = \bar{0}$; $\bar{2}x = \bar{1}$ et $x^2 + \bar{2}x + \bar{1} = \bar{0}$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ le système suivant :
$$\begin{cases} x + \bar{3}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + y = \bar{0} \end{cases} .$$

En déduire les entiers relatifs x et y tels que $4 \mid (x + 3y - 1)$ et $4 \mid (2x + y)$.

Exercice 4

1/ Déterminer tous les entiers naturels n tels que :

- a) $n + 2$ divise 8
- b) $n + 3$ divise $n + 15$
- c) $n + 2$ divise $3n + 12$
- d) $n - 1$ divise $n^2 + 3n + 2$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, $x = 5n + 31$ et $y = 3n + 12$. Montrer que si d divise x et d divise y alors d divise 33

3/ Montrer que pour tout entier naturel n , $n(n + 1)$ est divisible par 2

4/ Montrer que si on retranche 1 du carré d'un entier naturel impair, on obtient un nombre divisible par 8

Exercice 5

1/ On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $A = (n - 1)(n^2 + n + 6)$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A est divisible par 3
- b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A est divisible par $n^2 - 1$
- c) Montrer que si un entier naturel d divise $a = n^2 + n + 6$ et divise n ou $n + 1$ alors il divise aussi 6

2/ Montrer que le nombre $6^{14} - 36^6$ est divisible par 35

3/ On pose $f(n) = n^3 + 11n$

- a) Vérifier que $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ sont divisibles par 6
- b) Montrer que si $f(n)$ est divisible par 6 alors $f(n + 1)$ est aussi divisible par 6

4/ Un entier naturel $n > 150$ admet pour reste 12 et pour quotient q dans la division euclidienne par 13, il admet pour reste r et pour quotient q dans la division euclidienne par 14. Déterminer les valeurs possibles de n .

Exercice 6

1/ Dans chacun des cas suivants, déterminer l'entier relatif x tel que :

- a) $12 \equiv x [11]$
- b) $x \equiv 111 [23]$ et $-23 < x < 0$
- c) $x \equiv 215 [13]$ et $0 \leq x < 13$

2/ Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Déterminer n dans chaque cas ci-dessous :

- a) $13 \equiv 5 [n]$
- b) $125 \equiv -11 [n]$
- c) $87 \equiv 74 [n]$

Exercice 7

- 1/ a) Déterminer suivant n le reste de la division de 2^n par 3
 b) En déduire que le reste de la division de 275423^n et $275423^n + 372121^n$ par 3
- 2/ Vérifier que $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$. En déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 13 \mid 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$$

Exercice 8

1/ Soit n un entier naturel non nul

- a) Montrer que : si n est impair alors $n^2 \equiv 1 [8]$
- b) Montrer que si n est pair alors

$$n^2 \equiv 0 [8] \quad \text{ou} \quad n^2 \equiv 4 [8]$$

2/ Soient a, b, c trois entiers impairs

- a) Montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un carré parfait
- b) Montrer que $2(ab + bc + ca) \equiv 6 [8]$
- c) En déduire que $2(ab + bc + ca)$ n'est pas un carré parfait
- d) Montrer que $ab + bc + ca$ n'est pas un carré parfait

Exercice 9

1/ Démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$.

2/ Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.

3/ En déduire que, quel que soit n , $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

4/ a) Déterminer l'ensemble des éléments x de \mathbb{Z} qui vérifient : $3x \equiv 23 [7]$.

b) En déduire l'ensemble des couples $(x; y)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui vérifient $3x - 7y = 23$.

5/ a) Soit k un élément de \mathbb{Z} . Montrer que $2k + 1$ et $9k + 4$ sont premiers entre eux.

- b) Démontrer que le pgcd des nombres $2k - 1$ et $9k + 4$ est 1 ou 17.
 c) Pour quelles valeurs de k on a : $(2k - 1) \wedge (9k + 4) = 17$?

Exercice 10

- 1/ a) Déterminer les restes, suivant les valeurs de n , de la division de 3^n par 11.
 b) En déduire les entiers n pour lesquels $3^n + 7$ est divisible par 11.
 c) En déduire que $135^{2021} \equiv 3[11]$
- 2/ Déterminer les entiers n tels que $2^n - 1$ soit divisible par 9.

Exercice 11

Divisibilité par 9 par deux méthodes

- 1/ a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste de 7^n dans la division euclidienne par 9.
 b) Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7[9]$.
- 2/ a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$(10)^n \equiv 1[9].$$

- b) Soit N un entier naturel écrit en base dix, et S la somme de ses chiffres. Démontrer que :

$$N \equiv S[9].$$

- c) En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

- 3/ On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :

- * B la somme des chiffres de A ;
- * C la somme des chiffres de B ;
- * D la somme des chiffres de C .

- a) Démontrer que :

$$A \equiv D[9].$$

- b) Sachant que $2005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que

$$B \leq 72\,180.$$

- c) Démontrer que $C \leq 45$.

4/ En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

5/ Démontrer que $D = 7$.



« Commettre deux fois la même erreur : c'est l'une des faiblesses que l'être humain a le plus de mal à éviter. » (Agnès Guitard)