Série 3 : Arithmétique

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Montrer que :

1/ $\begin{cases} d \mid (n+3) \\ d \mid (n+9) \end{cases} \Rightarrow d \mid 6$

2/ $\begin{cases} d \mid (n^2+2n+3) \\ d \mid (n+1) \end{cases} \Rightarrow d \mid 2$

3/ $\begin{cases} d \mid (n^2+4n+7) \\ d \mid (n+2) \end{cases} \Rightarrow d \in \{-3,-1,1,3\}$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = n^2+3$ et $B = n+2$.

1/ Montrer que $\gcd(A,B) = \gcd(n+2,7)$.

2/ Déterminer en extension l'ensemble : $H = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 3

1/ Montrer que $8^{2001} - 8 \equiv 0\ [11]$.

2/ **a)** Montrer que $5^8 \equiv -1\ [17]$.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{500} sur 17.

3/ Déterminer le chiffre des unités du nombre N tel que :

$$N = 1987^{1991^{1983}}.$$

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : (x+1)^2 = 9+5y$

1/ Soit (x_0, y_0) une solution de (E). Montrer que $x_0 \equiv 1 \pmod 5$ ou $x_0 \equiv 2[5]$.

2/ Déterminer les solutions de (E).

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1/ Montrer que $n \wedge (n+1) = 1$.

2/ Montrer que $n \wedge (2n+1) = 1$.

3/ Soient $a = n^2 + 3n$ et $b = (2n+1)(n+3)$; déterminer $a \vee b$.

4/ Déterminer $(3n+5) \wedge (10n+11)$.

5/ Montrer que $a \wedge b \in D_8$ où $a = 3n+1$ et $b = 5n-1$.

Exercice 6

On considère deux entiers naturels non nuls, x et y premiers entre eux.
On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1/ **a)** Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.
b) En déduire que S et P sont premiers entre eux.
c) Démontrer que S et P sont de parités différentes.

2/ Déterminer les diviseurs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3/ Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.

1. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \quad \text{avec} \quad d = a \wedge b \end{cases}$$

Exercice 7

1/ Déterminer le reste de la division Euclidienne de 1450^{2011} par 2011.

2/ Calculer à l'aide de l'algorithme d'Euclide $1450 \wedge 105$.

3/ On désigne par a et b deux entiers naturels vérifiant $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1450 \\ a \vee b = 105 \end{cases}$

a) Soit $d = a \wedge b$; Montrer que d divise 5.
b) En déduire les valeurs possibles de ab.
c) Trouver alors a et b.

Exercice 8

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1/ Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2/ On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.

a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5.

3/ On considère les nombres a et b définis par :

$$a = n^3 + 2n^2 - 3n \qquad b = 2n^2 - n - 1$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.

4/ **a)** On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

b) En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

c) Application :

Déterminer Δ pour $n = 2012$.

Déterminer Δ pour $n = 2013$.

Exercice 9

1/ Montrer que pour tout entier naturel n, $A = 2n^2 + 7n + 6$ n'est pas premier.

2/ Déterminer es valeurs de n pour lesquelles l'entier $B = 3n^2 + 8n + 5$ soit premier.

3/ **a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n^{13} - n = (n^6-1)(n^6+1)n$.

b) Montrer que $n^{13} - n$ est divisible par 7, par 2 et par 3.

c) Montrer que $n^{13} - n$ est divisible par 546.

d) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $n^{13} - n$ soit divisible par 1092.

Exercice 10

Démontrer en utilisant une congruence que, pour tout entier naturel n on a :

1/ $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11

2/ $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9

3/ $n^7 - n$ est divisible par 7

4/ $n(n^4 - 1)$ est divisible par 5

Exercice 11

1/ Déterminer les entiers naturels n tels que :

- $n + 2$ divise $n + 10$.

- $n+1$ divise $3n+15$.

2/ Montrer que si d divise $3n-1$ et d divise $5n+40$ alors d divise 125.

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $9n+4$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

4/ Vérifier que $2^{2024}+2^{2026}$ est divisible par 5.

5/ Montrer par récurrence que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}$; n^3-n est divisible par 6.
b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.
c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $2^{3n}-1$ est divisible par 7.

6/ **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.
b) En déduire que $A = 9^{100}-4^{50}$ est divisible par 7.

7/ **a)** Vérifier que pour tout entier non nul n :

$$10^{3(n+1)}-(-1)^{n+1} = 10^3 \cdot 10^{3n}-(-1)^n \cdot 10^3+(-1)^n \cdot 1001$$

b) Montrer par récurrence que pour tout entier non nul n, 1001 divise $10^{3n}-(-1)^n$.
c) En déduire que l'entier 1 000 000 000 000 001 est divisible par 1001.

Une once de pratique vaut mieux que des tonnes de discours .(Gandhi)