Sujet 10

Exercice 1

On pose $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
Soit $\perp$ la loi de composition interne définie sur G par :
pour tout (a, b) et (x, y) de G : $\boldsymbol{(a, b) \perp (x, y) = (ax, ax + ay + bx)}$.

Partie I

1/ Montrer que $\perp$ est une loi associative.

2/ Montrer que $(G, \perp)$ est un groupe commutatif.

3/ Soit n de $\mathbb{N}^*$, calculer : $\underbrace{(a;b) \perp (a;b) \perp \cdots \perp (a;b)}_{n \text{ fois}}$

Partie II

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire.
On pose : $\boldsymbol{\mathcal{E} = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1/ **a)** Montrer que $(\mathcal{E}, +)$ est un groupe commutatif.

b) Calculer J^2 et $(I + J)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2/ On pose $\boldsymbol{K = \{M(a;b) / (a;b) \in G\}}$ et soit φ l'application définie de G vers $M_2(\mathbb{R})$ par : $\forall (a;b) \in G \quad \varphi\big((a;b)\big) = M(a; a+b)$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(G; \perp)$ vers $\big(M_2(\mathbb{R}); \times\big)$

b) Déterminer la structure de $(K; \times)$ en justifiant votre réponse.

c) $(K; +; \times)$ est-il un corps ?

3/ On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
En utilisant l'homomorphisme φ déterminer A^{-1} et A^{2023}.

Exercice 2

Partie I

1/ En utilisant l'algorithme d'EUCLIDE, déterminer une solution particulière de l'équation diophantienne (E) : $27x - 31y = 1$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

<u>Partie II</u>

On considère l'ensemble $A = \{0\,;1\,;2\,;\dots\,;30\}$

1/ Déterminer le nombre **a** de l'ensemble A tel que $\mathbf{27}\boldsymbol{a} \equiv \mathbf{1}\ [\mathbf{31}]$.

2/ Soit f l'application de A vers A qui à chaque élément n de A associe le reste de la division euclidienne de $\mathbf{27}\boldsymbol{n} + \mathbf{4}$ par 31.

- **a)** Soient **n** et **m** deux entiers de l'ensemble A.
  Montrer que $\boldsymbol{f(n) = f(m) \Rightarrow n = m}$.
- **b)** Soit **m** un élément de A, déterminer **n** de A tel que $\boldsymbol{m = f(n)}$.
- **c)** Montrer que f est bijective puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 3

le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ et soit $m \in \mathbb{C}^* - \{i\}$

<u>Partie I</u>

1/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\boldsymbol{(E) : z^2 - m(m+i)z + im^3 = 0}$

- **a)** Soit Δ le discriminant de l'équation (E). Montrer que $\Delta = \Big(m(m-i)\Big)^2$
- **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
- **c)** Déterminer sous forme exponentielle les valeurs de m pour que le produit des solutions soit $8e^{i\frac{\pi}{3}}$

2/ On note F_m la transformation du plan $\mathcal{P}$ d'expression complexe $\boldsymbol{z' = imz + m^2}$. Trouver **m** sous forme exponentielle pour que la transformation F_m soit une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et déterminer dans ce cas l'affixe du centre Ω de la rotation.

<u>Partie II</u>

On considère les points $A(m)$, $B(im)$, $C\Big(m(1+i)\Big)$

1/ Montrer que le triangle (OAB) est un triangle isocèle rectangle en O

2/ Montrer que $(OACB)$ est un carré

3/ Soit $P(p)$ et $Q(q)$ des points du plan tels que :

- ∗ P l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

$\ast$ Q est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$

a) Montrer que $p = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $q = m\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + 1\right)$

b) Vérifier que $q - p = m\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$ et $im - p = m\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$

c) Déduire que les points B, P et Q sont alignés

Exercice 4

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x) = x + e^{-x}}$
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ Étudier les variations de f (limites aux bornes + dérivée + Tableau de variation)

2/ Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation

3/ Tracer la courbe (C)

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_1 = 0 \quad , \quad \text{et pour tout entier naturel } n \text{ non nul,} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1/ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

2/ **a)** Vérifier que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : f\left(\ln(n)\right) = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$

b) Déduire par récurrence que, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln(n) \leq u_n$

c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$

3/ **a)** En utilisant 2)b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{1}{n}$

b) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}) : u_n \leq 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$

4/ **a)** Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}) : \dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,dx$.

b) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
$u_n \leq 1 + \ln(n-1)$

c) Déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)} = 1$

5/ Pour tout entier naturel non nul n on pose : $b_n = e^{u_n}$
Vérifier que pour tout entier naturel non nul n : $b_{n+1} = b_n \times e^{\frac{1}{b_n}}$

6/ **a)** Soit $x \in]0,1]$ on pose pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$: $\varphi(t) = e^{\sqrt{t}} - 1 - \sqrt{t}$
En appliquant le théorème des accroissements finis à φ sur $[0, x^2]$,
montrer que $\exists\, c \in]0, x^2[: \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{\sqrt{c}} - 1}{\sqrt{c}}$. puis déduire que
$\exists\, d \in]0, x[: \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2} e^d$.

b) Montrer que $(\forall x \in]0,1])$: $0 \leq e^x - x - 1 \leq \dfrac{x^2}{2} e$.

c) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $0 \leq b_{n+1} - b_n - 1 \leq \dfrac{1}{2n} e$.

d) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$: $0 \leq b_n - n \leq \dfrac{e}{2}\big(1 + \ln(n-1)\big)$,
en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b_n}{n} = 1$.

7/ Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \ln(n)) = 0$

Partie III

soit g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad : \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1/ Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $g'(x) = h(x)$ et $h'(x) = g(x)$.

2/ Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et donner sa bijection réciproque g^{-1}.

Partie IV

soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{g(t)}{t^2}\, dt \; ; & x \neq 0 \\ G(0) = \ln 2 \end{cases}$$

1/ Montrer que G est paire

2/ Montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[)$: $G(x) \geq g(x) \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\, dt$

3/ Vérifier que $(\forall x \in]0, +\infty[)$: $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{2x}$

Déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{G(x)}{x} = +\infty$

4/ Soit $x > 0$

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^x (x - t) g(t)\, dt = g(x) - x$. On pourra appliquer $g' = h$ et $h' = g$

b) Soit $t>0$, montrer que $0 \leq \int_0^t (t-u)g(u)\,du \leq g(t)\int_0^t (t-u)\,du$

et déduire que $0 \leq \dfrac{g(t)-t}{t^2} \leq \dfrac{1}{2}g(t)$

c) Soit $x>0$, montrer que $0 \leq G(x)-\ln 2 \leq \dfrac{1}{2}\int_x^{2x} g(t)\,dt$

d) Déduire que G est continue en 0

5/ En appliquant le théorème de la valeur moyenne, montrer que

$$(\forall x>0): g(x) \leq \frac{1}{x}\int_x^{2x} g(t)\,dt \leq g(2x)$$

Et déduire que G est dérivable en 0 et que $G'(0)=0$

6/ Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}^*): G'(x) = \dfrac{g(2x)-2g(x)}{x^2}$

7/ Montrer que $(\forall x>0): g(2x)-2g(x)>0$ et donner le tableau de variation de G sur $\mathbb{R}^+$

FIN