



Sujet 11



Exercice 1

On pose $A =]e, +\infty[$ pour tout x et y de A on pose $x * y = e^{1+(1-\ln x)(1-\ln y)}$

- 1/ Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans A .
- 2/ Montrer que $*$ est associative et commutative dans A .
- 3/ Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε dans A à déterminer.
- 4/ Montrer que $(A, *)$ est un groupe commutatif.
- 5/ Montrer que l'ensemble $H = \{e^{1+2^n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(A, *)$.
- 6/ Soit T la loi de composition interne définie dans $B =]1, +\infty[$ par :

$$xTy = (x - 1)(y - 1) + 1$$

Et on considère l'application $\begin{cases} \varphi : A \longrightarrow B \\ x \mapsto \ln x \end{cases}$

- a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(A, *)$ sur (B, T) .
- b) En déduire que (B, T) est un groupe commutatif.

Exercice 2

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})
 Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes

PARTIE I

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on considère dans \mathbb{C} l'équation $(E_a) : z^2 - (1 + (1 + i)a)z + ia^2 + a = 0$

- 1/ Vérifier que a est une solution de (E_a)
- 2/ On note par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_a) tels que $z_1 = a$
 - a) Déterminer z_2 et vérifier que $z_2 = iz_1 + 1$
 - b) Dans le plan complexe on note par A et B les points d'affixe z_1 respectivement z_2
 Montrer que B est l'image de A par une rotation r dont on déterminera le centre et une mesure de son angle

PARTIE II

- 1/ Soit $z \in \mathbb{C}$

a) Montrer que $|z| = |1 + iz| \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \frac{1}{2}$

b) Dédire l'équivalence $\begin{cases} |z| = |1 + iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2/ On considère dans \mathbb{C} le système suivant (S) : $\begin{cases} z^n(1 + iz) = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$ où n est un entier naturel non nul

a) Montrer que si z est une solution de (S) alors $z \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}} \right\}$

b) Vérifier que $1 + ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 + ie^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c) Dédire que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv -2 \pmod{12}$.

Montrer de même que $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $5n \equiv 2 \pmod{12}$

d) Justifier l'équivalence $5n \equiv 2[12] \Leftrightarrow n \equiv -2[12]$

e) Dédire suivant l'entier naturel n l'ensemble des solutions de (S)

Exercice 3

Dans tout ce qui suit p est un nombre premier tel que $p \equiv 5[6]$ et $p > 3$.

Et on considère dans \mathbb{N}^{*2} l'équation (E) : $x^3 + y^3 = p(1 + xy)$

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ une solution de (E)

On pose $d = x \wedge y$ et soit $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $x = da$ et $y = db$

1/ a) Justifier que $a \wedge b = 1$ et $d^3(a^3 + b^3) = p(1 + d^2ab)$

b) En remarquant que $1 = (1 + d^2ab) - d^2ab$ montrer que $d^3 \wedge (1 + d^2ab) = 1$

c) Dédire que $d = 1$ ainsi on a donc $\begin{cases} (a^3 + b^3) = p(1 + ab) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

2/ Montrer que $p \wedge b = 1$ et $p \wedge a = 1$

3/ Montrer que $a^3 \equiv -b^3 [p]$ et que $a^{p-1} \equiv b^{p-1} [p]$

4/ En déduire que $a \equiv -b [p]$ on pourra écrire p sous la forme $p = 5 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

5/ On pose donc $a + b = pu$ avec $u \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u(a - b)^2 + (u - 1)ab = 1$

en déduire que $\begin{cases} a + b = p \\ |a - b| = 1 \end{cases}$

6/ Dédire dans \mathbb{N}^{*2} l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 4

PARTIE I

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

1/ Vérifier que f est impaire et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2/ Étudier les variations de f

3/ Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} dans vers l'intervalle $I =]-1, 1[$, on note f^{-1} sa bijection réciproque (expression de f^{-1} non demandée)

4/ Écrire l'équation de la tangente T au point $O(0, 0)$

5/ Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1 - f^2(x)$ en déduire que $\forall x \geq 0 : 0 \leq f(x) \leq x$

6/ Justifier que $\forall x \geq 0 : 0 \leq 1 - f'(x) \leq x^2$ en déduire $\forall x \geq 0 : 0 \leq x - f(x) \leq \frac{x^3}{3}$

7/ Pour chaque entier naturel n non nul

on pose $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ et on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

a) Vérifier que $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$ en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n - S_n \leq \frac{1}{3n^2}$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(utiliser la question 6 partie 1)

8/ Construire dans le même repère la tangente T et les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

soit $\lambda \in]0, 1[$. On note S_λ l'aire en cm^2 du domaine

$$D_\lambda = \left\{ M(x, y) \in P / x \in [0, \lambda], y \in [0, \lambda], f(x) \leq y \leq f^{-1}(x) \right\}$$

9/ Montrer que la fonction $x \rightarrow \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ est une primitive de f sur \mathbb{R}

10/ Déduire $S_\lambda = \lambda^2 - 2 \ln\left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right) cm^2$

PARTIE II

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt & ; \quad x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1/ Montrer que F est une fonction impaire

2/ Montrer que $\forall x > 0 : f(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq F(x) \leq f(2x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$

3/ Dédurre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln 2$ et que F est continue en 0

4/ Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^{*+} et que $\forall x > 0 : F'(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$

5/ En appliquant le théorème des accroissements finis deux fois de suite à la fonction F puis à f montrer que

$$(\forall x > 0) : 1 - f^2(2x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq 1 - f^2(x)$$

6/ Dédurre que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 1$

7/ Donner le tableau de variation de F sur \mathbb{R}^+

PARTIE III

On considère la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(t))^n dt$

1/ Calculer I_0 et I_1

2/ a) Vérifier que $\forall t \in [0, \ln(\sqrt{3})] : 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(\sqrt{3})$ et calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

3/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

4/ Dédurre que $\forall p \in \mathbb{N}^* :$

$$\begin{cases} I_{2p} = I_0 - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ I_{2p+1} = I_1 - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \end{cases}$$

5/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{k \times 2^k}$

montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite

FIN