



Sujet 11



Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Calculer u_1 et u_2 .

2/ a) Démontrer que

$$u_{n+1} + 1 = \frac{2(u_n + 1)}{3 + u_n} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Démontrer par récurrence que $u_n > -1$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Vérifier que

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 1)^2}{3 + u_n} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

3/ On pose $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer v_0 .

b) Montrer que :

$$v_{n+1} = \frac{3u_n + 5}{2(u_n + 1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

d) Calculer v_n en fonction de n .

4/ a) Vérifier que

$$u_n = \frac{-v_n + 2}{v_n - 1} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

puis déduire que

$$u_n = \frac{-n}{n + 2} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2

- 1/ Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(E) : (e^x - 3)(\ln x + 2) = 0$.
- 2/ Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $E_1) : \ln^2 x - 4\ln x - 77 = 0$
- 3/ En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 (2x - 2)e^{2x} dx = \frac{3 - e^2}{2}$$

Exercice 3

Un sac contient 6 boules : 4 boules vertes et 2 boules rouges.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

- 1/ On tire au hasard et simultanément 2 boules du sac. On considère les événements :
 - A : « Les deux boules tirées ont la même couleur »
 - B : « Parmi les deux boules tirées, au moins une boule est verte »
 - a) Montrer que $p(A) = \frac{7}{15}$ et calculer $p(B)$.
 - b) On répète cette expérience 3 fois, quelle est la probabilité que l'événement A soit réalisé exactement 2 fois ?
- 2/ On jette en l'air une pièce de monnaie non truquée.
 - * Si on obtient la face (F), on tire une boule du sac.
 - * Si on obtient la face (P), on tire successivement sans remise deux boules du sac.

On considère la variable aléatoire X qui associe à chaque résultat, le nombre de boules rouges restantes dans le sac.

- a) Vérifier que X peut prendre les valeurs : 0 ; 1 ; 2.
- b) Établir que : $p(X = 2) = \frac{8}{15}$.
- c) Déterminer la loi de probabilité de X .
- d) Montrer que l'espérance mathématique de X est égale à $\frac{3}{2}$.

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 8 - \frac{8}{x} - 4\ln x$$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
 b) Déterminer la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
 c) Vérifier que :

$$f(x) = 4 \left(\frac{2x - 2 - x \ln x}{x} \right), \quad (\forall x \in I)$$

puis déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

- 2/ a) Montrer que :

$$f'(x) = 4 \left(\frac{2-x}{x^2} \right), \quad (\forall x \in I)$$

- b) Dresser le tableau de variations de f sur I (avec valeur exacte de $f(2)$).
 c) Montrer que :

$$f''(x) = 4 \left(\frac{x-4}{x^3} \right), \quad (\forall x \in I)$$

- d) Déterminer la concavité de (C) en donnant son point d'inflexion.

- 3/ a) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
 b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]4,9 ; 5[$.

- 4/ Ci-dessous, on a tracé la courbe (C) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

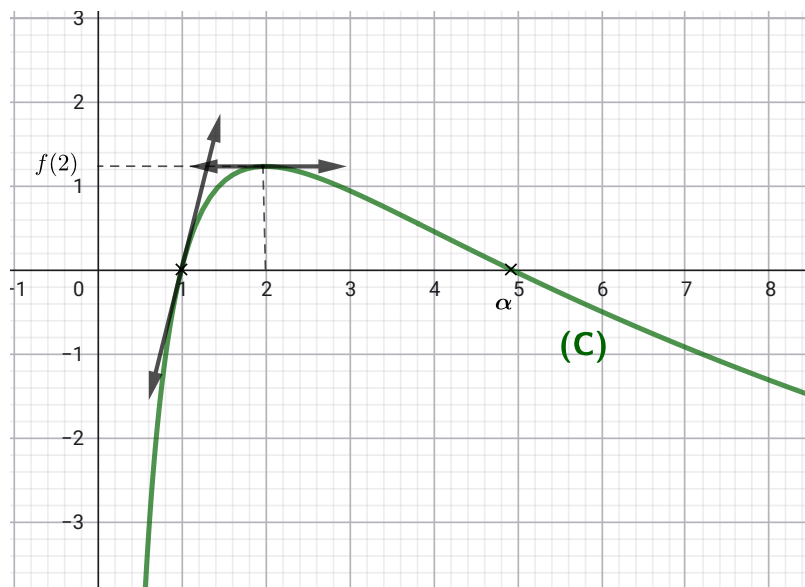


FIGURE 1 – Courbe (C)

- a) Résoudre dans I l'équation $f(x) = 0$.
 b) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur I .
 c) Donner l'image de l'intervalle $[1 ; 2]$ par la fonction f .
 d) Quel est le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = -2022 ?$$