Sujet 12

Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Considérons dans l'espace les points

$$A(4,1,-6)\ ,\ B(6,5,-3)\ ,\ C(8,4,-5)\ ,\ D(6,4,-1).$$

1/ Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

2/ En déduire l'aire du triangle ABC.

3/ Montrer que le plan (ABC) a pour équation $x-2y+2z+10=0$.

4/ Soit (S) la sphère de centre D et de rayon R. On suppose que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r=\sqrt{5}$.

- **a)** Montrer que le rayon de la sphère (S) est $R=3$.
- **b)** Donner alors l'équation de la sphère (S).
- **c)** Déterminer les coordonnées du point H, centre du cercle (Γ).

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n+3}{u_n+6} \end{cases}$.

1/
- **a)** Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $-2\le u_n\le 1$.
- **b)** Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- **c)** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2/ Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=1+\dfrac{4}{u_n-1}$.

- **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{7}{3}$.
- **b)** Exprimer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n.

3/
- **a)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $1-u_{n+1}\le\dfrac{3}{4}(1-u_n)$.
- **b)** En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $1-u_n\le 3\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
- **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice 3

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\boldsymbol{(E) : z^2 - 6z + 10 = 0}$

Dans le plan complexe associé à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 - \sqrt{2}$, $b = 3 - i$ et $c = \bar{b}$.

2/ **a)** Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

b) En déduire que $AB = AC$ et $\overline{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

c) Montrer que $\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)^{20} = -1$.

3/ **a)** Soit I le milieu de $[BC]$. Déduire de 2)b) que $\overline{\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{8}[2\pi]$.

b) Donner la forme trigonométrique de $c - a$.

c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$.

4/ Montrer que l'affixe du point D l'image de B par la rotation R est $d = -1 - 3i$.

Exercice 4

Un sac contient 16 boules : Huit boules **rouges** numérotées **1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0** six boules **vertes** numérotées **1 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0** et deux boules **blanches** numérotées **1 ; 0** .
Les boules sont indiscernables au toucher .
On tire au hasard et simultanément 3 boules du sac.

1/ Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A « Les trois boules tirées portant le numéro **0** » .

B « Les trois boules tirées sont vertes » .

C « Les trois boules sont de couleurs disjointes deux à deux ».

2/ **a)** Calculer $\boldsymbol{p(A \cap B)}$ et $\boldsymbol{p(A \cup B)}$.

b) Est ce que A et B sont indépendants ?

3/ Calculer la probabilité d'avoir trois boules portant le numéro **0** . sachant qu'elles sont vertes.

Exercice 5

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{g(x) = \dfrac{x - 2e^{\frac{x}{2}}}{2}}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

2/ Déterminer g' puis déduire que g admet une valeur maximale absolue au point 0.

3/ En déduire que $g(x) < 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x) = -x + 2 - (x+2)e^{-\frac{x}{2}}}$
On note $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique **2 cm**.)

1/ **a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

2/ **a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)e^{-\frac{x}{2}} = 0$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + x - 2$, puis en déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote (D) d'équation qu'on déterminera.

c) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(D) : y = 2 - x$.

3/ **a)** Vérifier que $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \times g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4/ **a)** Montrer que le signe de $f''(x)$ est celui de $2 - x$.

b) Déterminer la concavité de la courbe $(\mathcal{C})$ et son point d'inflexion.

5/ Calculer $f(0)$ et tracer (D) et $(\mathcal{C})$.

6/ **a)** Par une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_0^2 xe^{-\frac{x}{2}}\,dx = \frac{4e-8}{e}$.

b) Déterminer $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$ et $(D) : y = -x + 2$.