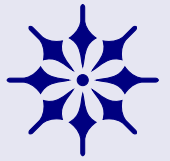




CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHS

Session Normale 2026

2 BAC SECO - SGC S. EL JAAFARI



Exercice 1

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 25}{u_n + 11} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1/ a) Calculer u_1

$$u_1 = \frac{u_0 - 25}{u_0 + 11} = \frac{1 - 25}{1 + 11} = \frac{-24}{12} = -2 \quad \text{Donc : } u_1 = -2$$

b) Montrer que : $\frac{u_n - 25}{u_n + 11} + 5 = 6 \times \frac{u_n + 5}{u_n + 11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{u_n - 25}{u_n + 11} + 5 &= \frac{u_n - 25 + 5(u_n + 11)}{u_n + 11} = \frac{u_n - 25 + 5u_n + 55}{u_n + 11} = \frac{6u_n + 30}{u_n + 11} = \frac{6(u_n + 5)}{u_n + 11} \\ &= 6 \frac{u_n + 5}{u_n + 11}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{u_n - 25}{u_n + 11} + 5 = 6 \frac{u_n + 5}{u_n + 11}.$$

2/ On pose : $v_n = \frac{1}{5 + u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Calculer v_0 .

$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 5} = \frac{1}{1 + 5} = \frac{1}{6} \quad \text{Donc : } v_0 = \frac{1}{6}$$

b) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{6}$.

D'après la question précédente, $u_{n+1} + 5 = 6 \frac{u_n + 5}{u_n + 11}$. Donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 5 &= 6 \frac{u_n + 5}{u_n + 11} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 5} = \frac{u_n + 11}{6(u_n + 5)} \\ &\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{(u_n + 5) + 6}{6(u_n + 5)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{u_n + 5} \\ &\Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Par conséquent : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{6}$.

Alors La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison $\frac{1}{6}$.

c) Écrire v_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Puisque (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{6}$, alors : $v_n = v_0 + n \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}n = \frac{n+1}{6}$

$$\text{Ainsi : } v_n = \frac{n+1}{6}.$$

3/ a) Montrer que $u_n = \frac{1-5v_n}{v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\text{Comme } v_n = \frac{1}{5+u_n} \Leftrightarrow 5+u_n = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} - 5 \Leftrightarrow u_n = \frac{1-5v_n}{v_n}.$$

$$\text{Ainsi : } u_n = \frac{1-5v_n}{v_n}.$$

b) En déduire que $u_n = \frac{1-5n}{1+n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\text{On a } v_n = \frac{n+1}{6} \text{ donc } u_n = \frac{1-5v_n}{v_n} = \frac{1-5\frac{n+1}{6}}{\frac{n+1}{6}} = \frac{6-5(n+1)}{n+1} = \frac{1-5n}{n+1}.$$

$$\text{Ainsi : } u_n = \frac{1-5n}{n+1}.$$

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\text{On a } u_n = \frac{1-5n}{1+n} = \frac{n(\frac{1}{n} - 5)}{n(\frac{1}{n} + 1)} = \frac{\frac{1}{n} - 5}{\frac{1}{n} + 1}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ donc } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 5 = -5 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Par conséquent, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -5$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -5.$$

Exercice 2

Une urne contient cinq boules rouges et deux boules vertes.

On tire au hasard simultanément cinq boules de l'urne.

On considère les trois événements suivants :

A : « Trois boules tirées sont rouges et deux sont vertes »

B : « Les boules tirées sont de même couleur »

C : « Au moins une boule tirée est verte ».

1/ Vérifier que : $C_7^5 = 21$.

$$\text{Le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 7 est : } C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

$$\text{Ainsi : } \text{Card}(\Omega) = C_7^5 = 21.$$

2/ a) Montrer que : $p(A) = \frac{10}{21}$.

L'événement A est : « Trois boules tirées sont rouges et deux sont vertes ».

Le nombre de façons de choisir 3 boules rouges parmi 5 et 2 boules vertes parmi 2 est :

$$\text{Card}(A) = C_5^3 \times C_2^2 = \frac{5 \times 4}{2} \times C_2^2 = 10 \times 1 = 10$$

$$\text{D'où } \text{Card}(A) = 10.$$

La probabilité de A est donc :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{10}{21}$$

b) Calculer $p(B)$.

L'événement B est : « Les boules tirées sont de même couleur ». Puisqu'on tire 5 boules au hasard et qu'il n'y a que 2 boules vertes dans l'urne, il est impossible de tirer 5 boules vertes. Par conséquent, la seule possibilité pour que les boules soient de même couleur est de tirer 5 boules rouges. Donc : $\text{Card}(B) = C_5^5 = 1$

La probabilité de B est donc :

$$p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{21}$$

c) Calculer $p(C)$.

L'événement C est : « Au moins une boule tirée est verte ». L'événement contraire $\overline{C}$ est : « Aucune boule tirée n'est verte », ce qui signifie que l'on ne tire que des boules rouges (c'est-à-dire l'événement B).

On a donc $\overline{C} = B$, d'où $p(\overline{C}) = p(B) = \frac{1}{21}$.

Alors La probabilité de l'événement C est :

$$p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

3/ Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de boules rouges tirées.

a) Copier puis compléter le tableau ci-dessous de la loi de probabilité de X .

- Pour $X = 3$: Cela correspond à l'événement A , donc $p(X = 3) = p(A) = \frac{10}{21}$.
- Pour $X = 4$: On tire 4 boules rouges parmi 5 et 1 boule verte parmi 2.

$$\text{Card}(X = 4) = C_5^4 \times C_2^1 = 5 \times 2 = 10 \implies p(X = 4) = \frac{10}{21}$$

- Pour $X = 5$: Cela correspond à l'événement B , donc $p(X = 5) = p(B) = \frac{1}{21}$.

Vérifions : $\frac{10}{21} + \frac{10}{21} + \frac{1}{21} = 1$.

x_i	3	4	5
$p(X = x_i)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

b) Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X .

L'espérance est donnée par la formule $E(X) = \sum x_i \cdot p(X = x_i)$:

$$E(X) = 3 \times \frac{10}{21} + 4 \times \frac{10}{21} + 5 \times \frac{1}{21} = \frac{30 + 40 + 5}{21} = \frac{75}{21}$$

En simplifiant par 3 :

$$E(X) = \frac{25}{7}$$

Exercice 3

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2x^2 + 1$ et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

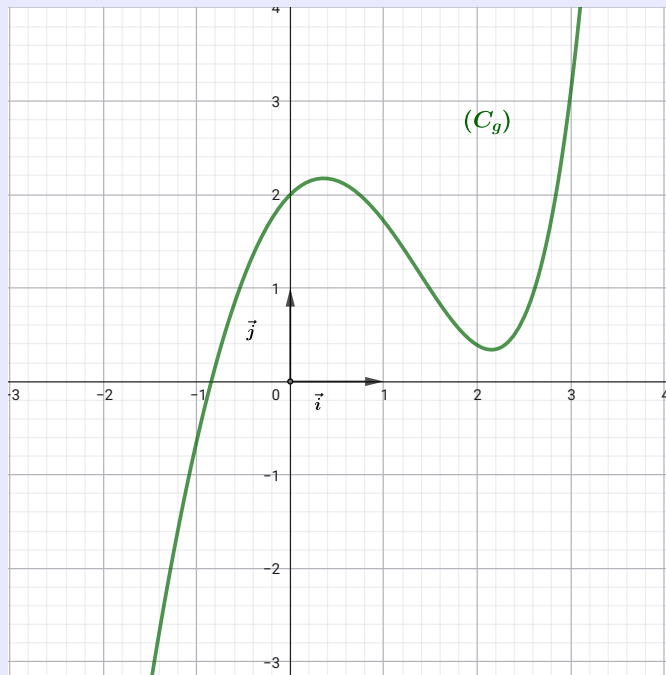
- 1/ En utilisant le graphique ci-après, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. **Aucune justification n'est demandée.**

A : « L'équation $g(x) = 1$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$ ». **Vraie**

B : « La fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$ ». **Fausse**

C : « La fonction g admet une valeur maximale sur $\mathbb{R}$ ». **Fausse**

D : « $g'(2) \leq 0$ ». **Vraie**



- 2/ a) Calculer $g'(x)$.

On a $(e^x)' = e^x$ et $(-2x^2)' = -4x$ et $(1)' = 0$, alors $g'(x) = e^x - 4x$.

Ainsi : $g'(x) = e^x - 4x$

- b) Vérifier que : $g''(x) = e^x - 4$.

$g''(x) = (g'(x))' = (e^x - 4x)' = e^x - 4$, car : $(e^x)' = e^x$ et $(-4x)' = -4$.

Ainsi : $g''(x) = e^x - 4$.

- c) Étudier le signe de $g''(x)$ puis en déduire que le point d'abscisse $\ln 4$ est un point d'inflexion de la courbe (C_g) .

$$- \quad g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4.$$

$$- \quad g''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 4 > 0 \Leftrightarrow e^x > 4 \Leftrightarrow x > \ln 4.$$

$$- \quad g''(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 4 < 0 \Leftrightarrow e^x < 4 \Leftrightarrow x < \ln 4.$$

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$

D'après le tableau de signe de $g''(x)$, on constate que la dérivée seconde g'' s'annule en $\ln 4$ en changeant de signe.

Ainsi : Le point d'abscisse $\ln 4$ est un point d'inflexion de la courbe (C_g) . ■

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, alors par différence des limites on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty. \text{ D'où : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty. \quad \blacksquare$$

2/ a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\left(\text{On peut écrire } f(x) = x \left(\frac{x}{2} - \frac{\ln x}{x} \right) \right)$$

$$\text{D'après l'indication on a : } f(x) = x \left(\frac{x}{2} - \frac{\ln x}{x} \right).$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty. \text{ Donc, par produit des limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \times +\infty = +\infty$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \quad \blacksquare$$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

$$* \text{ Calcul de } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{x}{2} - \frac{\ln x}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \quad \blacksquare$$

* Interprétation géométrique

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors la courbe (C_f) admet **une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe (Oy)** . ■

3/ a) Montrer que $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x \right)' = \frac{2x}{2} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

$$\text{Ainsi : } f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}. \quad \blacksquare$$

b) Étudier le signe de f' sur $]0, +\infty[$.

Puisque $x > 0$ donc $x+1 > 0$ par suite $\frac{x+1}{x} > 0$.

Alors le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x-1$.

Tableau de signe de $f'(x)$: ■

x	0	1	$+\infty$
$x - 1$		0	+
$f'(x)$	-	0	+

- c) Calculer $f(1)$, puis recopier et compléter de variations de f ci-après.

On a : $f(1) = \frac{1}{2} + \ln 1 = \frac{1}{2}$.

Tableau de variation de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

- d) En déduire que f est positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

D'après le tableau de variations de la fonction f , on constate qu'elle admet un minimum absolu sur $]0, +\infty[$ qui est $f(1) = \frac{1}{2}$, par conséquent pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

Or $\frac{1}{2} > 0$, donc pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) > 0$.

Ainsi : **La fonction f est positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$.**

- 4/ a) Montrer que : $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.

Utilisons une intégration par parties pour calculer $\int_1^e \ln x \, dx$.

En posant : $\begin{cases} u = \ln x \longrightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \longrightarrow v = x \end{cases}$, alors :

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} \, dx = e \ln e - 0 - \int_1^e 1 \, dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Ainsi : $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.

- b) Calculer l'intégrale : $\int_1^e \frac{x^2}{2} \, dx$.

$$\int_1^e \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e = \frac{1}{2} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{e^3 - 1}{6}.$$

Ainsi : $\int_1^e \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{e^3 - 1}{6}$.

- c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Montrer que $\mathcal{A} = \frac{e^3 - 7}{6}$ u.a..

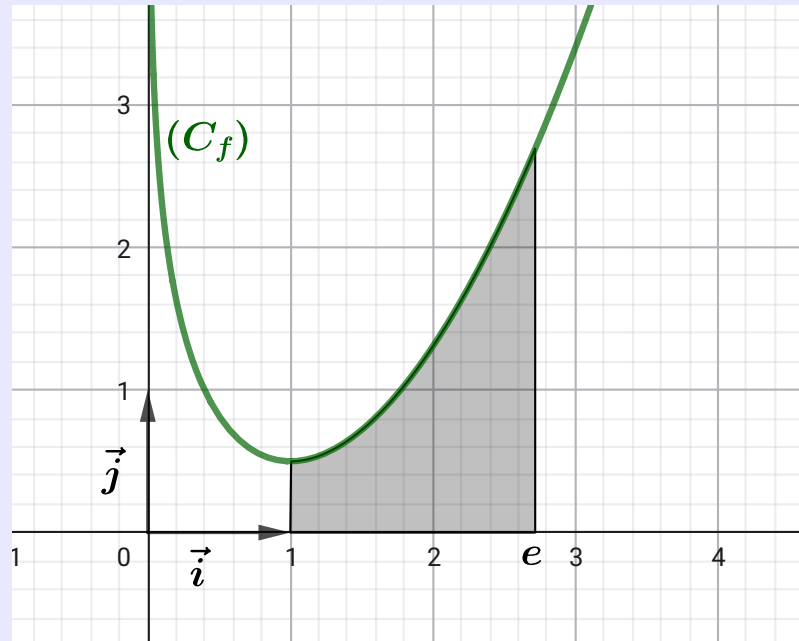


FIGURE 1 –

Puisque la fonction f est positive sur $]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \left(\int_1^e f(x) dx \right) u.a. \\
 &= \left(\int_1^e \frac{x^2}{2} dx - \int_1^e \ln x dx \right) u.a. \\
 &= \left(\frac{e^3 - 1}{6} - 1 \right) u.a. = \frac{e^3 - 7}{6} u.a.
 \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{A} = \frac{e^3 - 7}{6} u.a.$

