



CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHS

Session Normale 2026

2 BAC SM S. EL JAAFARI



Exercice 1

Partie I :

- 1/ a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = e^x - x - 1$, alors la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $u'(x) = e^x - 1$.

Donc :

— Pour $x \geq 0$ on a : $u'(x) \geq 0$

— Pour $x \leq 0$ on a : $u'(x) \leq 0$

D'où la fonction u admet un minimum en 0, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \geq u(0)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \geq 0$ car $u(0) = 0$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$. ■

- b) En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[, \frac{x^2}{2} + 1 + x \leq e^x$.

Pour tout x de $[0, +\infty[$, posons : $v(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$, donc la fonction v est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[, v'(x) = e^x - x - 1$.

Alors, d'après le résultat de la question 1/a) on a : $\forall x \in [0, +\infty[, v'(x) \geq 0$ d'où : $\forall x \in [0, +\infty[, v(x) \geq 0$, car $v(0) = 0$

Par conséquent : $\forall x \in [0, +\infty[, \frac{x^2}{2} + x + 1 \leq e^x$. ■

- 2/ Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose : $I(x) = \int_0^x te^{-t} dt$

- a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[, I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

On a : $t \geq 0 \Rightarrow e^t \geq 1 \Rightarrow e^{-t} \leq 1 \Rightarrow te^{-t} \leq t$.

Soit $x \geq 0$, en intégrant de 0 à x on obtient : $\int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x t dt$.

Comme $\int_0^x t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$, on a, alors : $I(x) \leq \frac{x^2}{2}$. ■

- b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[, I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$.

Appliquons une intégration par parties. Posons : $\begin{cases} u = t \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$

Alors : $\int_0^x te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^x - \int_0^x -e^{-t} dt$.

Donc $\int_0^x te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^x - [e^{-t}]_0^x = -xe^{-x} - (e^{-x} - 1)$.

Ainsi : $I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$ ■

- 3/ Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}$

- a) En utilisant les résultats des questions 1/b) et 2/b), montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}$.

★ Montrons que $\forall x > 0, g(x) \geq \frac{1}{2}$.

Soit $x > 0$. D'après le résultat de la question 1/b), on a $e^x \geq \frac{x^2}{2} + x + 1$.

Donc $e^x - x - 1 \geq \frac{x^2}{2}$, en divisant par x^2 on obtient : $\frac{e^x - x - 1}{x^2} \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi : $\forall x \in]0, +\infty[, g(x) \geq \frac{1}{2}$

★ Montrons que $\forall x > 0, g(x) \leq \frac{e^x}{2}$.

Soit $x > 0$. D'après les résultats de 2/a) et 2/b), on a : $-xe^{-x} - e^{-x} + 1 \leq \frac{x^2}{2}$

En multipliant par e^x on obtient : $e^x - x - 1 \leq \frac{x^2 e^x}{2}$, puis en divisant par x^2 on obtient : $\frac{e^x - x - 1}{x^2} \leq \frac{e^x}{2}$.

Ainsi : $\forall x > 0, g(x) \leq \frac{e^x}{2}$.

★ Conclusion : $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}$ ■

b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$.

D'après le résultat de la question 3/a) on a : $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}$ et puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$. Alors d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$ ■

Partie II :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}} & ; \quad x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

★ Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

Soit $x > 0$ donc : $f(x) = \frac{x}{e^x (1 - e^{-2x})} = xe^{-x} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2x}}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e^{-2x}} = 1 \end{cases}$$

Par produit des limites, on déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. ■

★ Interprétation graphique.

La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$. ■

2/ Montrer que f est continue à droite en 0.

Soit $x > 0$, on a : $f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}} = \frac{xe^x}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{2x}{e^{2x} - 1}$.

$$\text{Comme } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{e^{2x} - 1} = 1 \end{cases}$$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$ et puisque $f(0) = \frac{1}{2}$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Par conséquent la fonction f est continue à droite en 0. ■

3/ a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right)$.

$$\text{Soit } x > 0, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{2x - e^x + e^{-x}}{2x(e^x - e^{-x})} = \frac{-e^{-x}(e^{2x} - 2xe^x - 1)}{2xe^{-x}(e^{2x} - 1)} = -\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x(e^{2x} - 1)}$$

$$\text{et on a : } -e^{-x} f(x) \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = \frac{-xe^{-x}}{e^x - e^{-x}} \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = -\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x(e^{2x} - 1)}$$

$$\text{Alors } \forall x \in]0, +\infty[, \frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right) \quad \blacksquare$$

b) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x}$.

$$\text{Soit } x > 0, \text{ on a : } 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x} = 2 \frac{e^{2x} - 2x - 1}{4x^2} - \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{2x} - 2x - 1 - 2xe^x + 2x}{2x^2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2}.$$

$$\text{Ainsi : } \forall x \in]0, +\infty[, \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x} \quad \blacksquare$$

c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

$$\text{Soit } x > 0, \text{ on a : } \frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} f(x) \left(2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x} \right) \text{ et}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^{-x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2g(2x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases}$$

Alors par produit et somme sur les limites, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Par conséquent la fonction f est dérivable à droite en 0 et

$$\text{on a : } f'_d(0) = 0 \quad \blacksquare$$

4/ Pour tout $x \geq 0$, on pose : $J(x) = \int_0^x te^t dt$

a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq I(x) \leq J(x)$.

$$\text{Soit } x \geq 0, \text{ on a : } 0 \leq t \leq x \Rightarrow 0 \leq e^{-t} \leq e^t \Rightarrow 0 \leq te^{-t} \leq te^t \\ \Rightarrow \int_0^x 0 dt \leq \int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x te^t dt.$$

$$\text{Ainsi : } 0 \leq I(x) \leq J(x) \quad \blacksquare$$

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $J(x) = (x - 1)e^x + 1$.

Utilisons une intégration par parties.

$$\begin{cases} u = t & \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^t & \Rightarrow v = e^t \end{cases}$$

$$\text{Alors : } J(x) = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - [e^t]_0^x = xe^x - e^x + 1.$$

Ainsi : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad J(x) = (x-1)e^x + 1.$ ■

- c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$

Soit $x > 0$, on a : $f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}$, donc :

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x} - x(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{e^x(1-x) - e^{-x}(1+x)}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{e^{-x}(1+x) + e^x(x-1)}{(e^x - e^{-x})^2}$$

Or $I(x) = 1 - e^{-x}(1+x)$ et $J(x) = 1 + e^x(x-1)$

Donc $I(x) - J(x) = -[e^x(1+x) + e^{-x}(x-1)]$

Par conséquent : $f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$ ■

- d) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

D'après les résultats des questions 4/a) et 4/c) on a : $f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$ et

$\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq I(x) \leq J(x)$, alors : $\forall x \in [0, \infty[, f'(x) \leq 0$, par conséquent la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0, \infty[$. ■

- 5/ Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0, \infty[$ vers un intervalle à déterminer. On note f^{-1} la bijection réciproque de la fonction f

On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}$ si $x > 0$, donc la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $[0, +\infty[$; en plus d'après la question 4/d) la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, en outre on a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Alors la fonction f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers l'intervalle $J = \left]0, \frac{1}{2}\right]$. ■

- 6/ a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α à déterminer dans $[0, +\infty[$.

Pour $x = 0$: $f(0) = \frac{1}{2}$ donc 0 n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$.

Pour $x > 0$ on a : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - e^{-x}} = x \Leftrightarrow \frac{1}{e^x - e^{-x}} = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 1$

Posons $\varphi(x) = e^x - e^{-x} - 1$. La fonction φ ainsi définie sur $[0, +\infty[$ est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) = e^x + e^{-x}$, et comme $\forall x \in [0, +\infty[, e^x + e^{-x} > 0$, donc la fonction φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Or $\varphi(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ donc $0 \in \varphi([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$, alors d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI), l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.

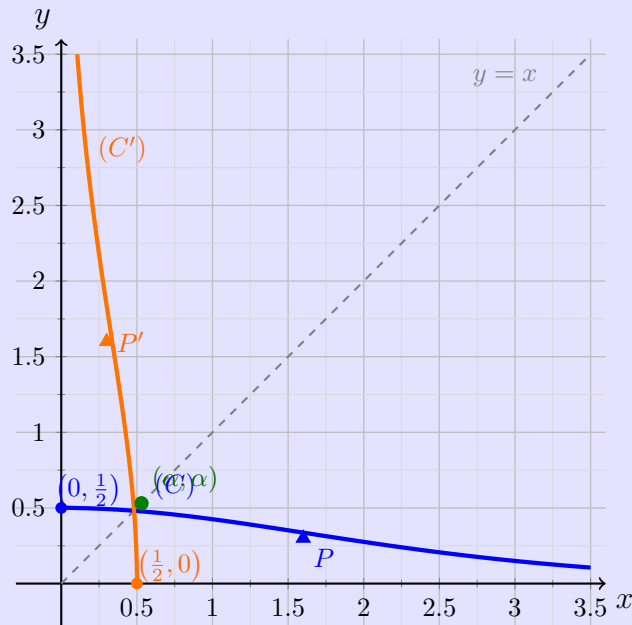
Ainsi l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$. ■

- b) Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}'$ de la fonction f^{-1} dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

(On admet que le point $P(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}$ avec $x_0 \simeq 1,6$ et $f(x_0) \simeq 0,3$

Courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité : 2 cm



Légende :

- (C) : courbe de f , décroissante de $\frac{1}{2}$ vers 0.
- (C') : courbe de f^{-1} , symétrique de (C) par rapport à $y = x$.
- $\bullet$: point fixe $(\alpha, \alpha) \approx (0,53; 0,53)$.
- $\blacktriangle$: points d'inflexion $P(1,6; 0,3)$ et $P'(0,3; 1,6)$.

7/ On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

On procède par **récence**.

Initialisation :

Pour $n = 0$: $u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 = 0 \leq \frac{1}{2}$. Alors la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

— Montrons que : $0 \leq u_{n+1}$.

Pour tout $x \geq 0$, le numérateur $x \geq 0$ et le dénominateur $e^x - e^{-x} \geq 0$, avec $f(0) = \frac{1}{2} > 0$.
Donc $f(x) \geq 0$, et en particulier $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$.

— Montrons que : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

On sait que la fonction f est **strictement décroissante** sur $[0, +\infty[$ (démontré en 5/) et $u_n \geq 0$, donc $f(u_n) \leq f(0)$. Par conséquent $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Conclusion : Par le principe de récurrence,

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

(On admet que pour tout $x > 0, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$)

On rappelle que $f(\alpha) = \alpha$ d'après le résultat de la question 6/a).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après des questions précédentes, α et u_n sont dans l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ et la fonction f est continue et dérivable sur tout intervalle de $]0, \frac{1}{2}[$ en particulier sur $[\alpha, u_n]$ ou $[u_n, \alpha]$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f sur l'un des deux intervalles $[\alpha, u_n]$ ou $[u_n, \alpha]$, on a :

$$\exists c \in]u_n, \alpha[\text{ (ou }]\alpha, u_n[) : f(u_n) - f(\alpha) = f'(c)(u_n - \alpha).$$

On admet que $\forall x \in]0, +\infty[, -\frac{1}{2} < f'(x) < 0$, donc $|f'(x)| < \frac{1}{2}$.

Par conséquent :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| \cdot |u_n - \alpha| < \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

Ainsi :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

c) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a $|u_0 - \alpha| = |0 - \alpha| = \alpha$. Or $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ (car $f(\alpha) = \alpha$). Alors : $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

Hérédité : Supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

En appliquant le résultat de 7/b) :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Alors :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Conclusion : Par le principe de récurrence,

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

d) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

D'après le résultat de la question 7/c), pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Par le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

1/ a) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq F(x) \leq x f(x)$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
 x \leq t \leq 2x &\Rightarrow f(2x) \leq f(t) \leq f(x) \Rightarrow \int_x^{2x} f(2x) dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt \\
 &\Rightarrow f(2x) \int_x^{2x} dt \leq F(x) \leq f(x) \int_x^{2x} dt \Rightarrow xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x)
 \end{aligned}$$

Or $\forall x \in [0, +\infty[$, $xf(2x) \geq 0$, alors :

$$\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x)$$

Ainsi :

$$\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq F(x) \leq xf(x)$$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

$$\text{Soit } x > 0. \text{ On a : } xf(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-2x}}$$

$$\text{Or par croissance comparée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

$$\text{Et comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

Alors par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, alors la courbe représentative de la fonction F admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$, d'équation la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des ordonnées).

2/ a) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$.

D'après la règle de Leibniz : « Si f est une fonction continue sur un intervalle I et u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle J telles que $u(J) \subset I$ et $v(J) \subset I$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est dérivable sur J . en plus $F'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$ »

En posant $u(x) = x$ et $v(x) = 2x$, alors les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[0, +\infty[$ et on a $u([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ et $v([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ et puisque la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$, alors d'après la règle de Leibniz, la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, F'(x) = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1)$$

Avec les notations et les conditions de la question 2/a) de cette partie III, pour $x \in [0, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= (2x)'f(2x) - (x)'f(x) \\
 &= 2f(2x) - f(x) \\
 &= \frac{2x}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{x}{e^x - e^{-x}} = \frac{x}{e^x - e^{-x}} \times \frac{4}{e^x + e^{-x}} - \frac{x}{e^x - e^{-x}} = f(x) \times \frac{4 - e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
 &= f(x) \times \frac{4e^x - e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1)
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\forall x \in [0, +\infty[, F'(x) = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1)$$

c) Montrer que $F(2 + \sqrt{3})$ est un extremum de la fonction F sur $[0, +\infty[$.

Étudions le signe de $F'(x)$ sur $[0, +\infty[$.

On sait que pour tout $x \geq 0$, $f(x) > 0$ et $e^{2x} + 1 > 0$ donc $\frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} > 0$. Par conséquent le signe de $F'(x)$ est le même que celui de $e^{2x} - 4e^x + 1$.

En posant $t = e^x$, on a : $e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2 - \sqrt{3}$ ou $t = 2 + \sqrt{3}$

— Pour $t = 2 - \sqrt{3} < 1 \Rightarrow x = \ln(2 - \sqrt{3}) < 0$.

— Pour $t = 2 + \sqrt{3} > 1 \Rightarrow x = \ln(2 + \sqrt{3}) > 0$.

Tableau de signe de $F'(x)$:

x	$0 \dots \ln(2 + \sqrt{3}) \dots +\infty$
$e^{2x} - 4e^x + 1$	$\dots - \dots 0 \dots + \dots$
$F'(x)$	$\dots - \dots 0 \dots + \dots$

D'après le tableau de signe de $F'(x)$ on déduit que $F'(\ln(2 + \sqrt{3})) = 0$ et $F'(x)$ change de signe en $\ln(2 + \sqrt{3})$, Alors $F(\ln(2 + \sqrt{3}))$ est un maximum de la fonction F sur $[0, +\infty[$. ■

Exercice 2

Soit m le nombre complexe tel que : $m = \sqrt{2}e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation E_m d'inconnue z :

$$(E_m) : \bar{m}z^2 - 2z + m = 0$$

1/ Étant donné que le nombre complexe $z_1 = \frac{m(1-i)}{2}$ est une solution de l'équation (E_m) , déduire que sa deuxième solution est $z_2 = \frac{m(1+i)}{2}$.

On sait que pour une équation du second degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) les deux racines z_1 et z_2 vérifient les deux relations : $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$.

Pour l'équation $(E_m : \bar{m}z^2 - 2z + m = 0$, le produit des racines est : $z_1 \times z_2 = \frac{m}{\bar{m}}$. Or $z_1 = \frac{m(1-i)}{2}$, alors :

$$z_1 \times z_2 = \frac{m}{\bar{m}} \Leftrightarrow z_2 = \frac{m}{\bar{m}} \times \frac{2}{m(1-i)} \Leftrightarrow z_2 = \frac{2m}{m\bar{m}(1-i)} \Leftrightarrow z_2 = \frac{m(1+i)}{m\bar{m}} \Leftrightarrow z_2 = \frac{m(1+i)}{2}$$

car : $m = \sqrt{2}e^{i\theta}$ et $m\bar{m} = 2$. Alors :

$$z_2 = \frac{m(1+i)}{2}$$

2/ Écrire z_1 sous forme exponentielle

On a : $1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $m = \sqrt{2} e^{i\theta}$. Alors :

$$z_1 = \frac{m(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{2} e^{i\theta} \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} = e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$$

Ainsi : $z_1 = e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$

Partie II :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'abscisses respectives $a = 1, b = -1, m, z_1$ et z_2 .

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1/ Montrer que : $R(M_1) = M_2$.

La rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ associe à chaque point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z = iz$

Pour $z = z_1 = \frac{m(1-i)}{2}$, on a : $z' = iz_1 = i \left(\frac{m(1-i)}{2} \right) = \frac{m(1+i)}{2} = z_2$.

Ainsi : $R(M_1) = M_2$.

2/ a) $(MM_1) \perp (OM_1)$ et $(MM_2) \perp (OM_2)$.

★ On a : $\frac{z_1 - m}{z_1} = 1 - \frac{m}{z_1} = 1 - \frac{2}{1-i} = -i$.

Donc $\frac{z_1 - m}{z_1}$ est un imaginaire pur, par conséquent :

$$(MM_1) \perp (OM_1)$$

★ De même on a : $\frac{z_2 - m}{z_2} = 1 - \frac{m}{z_2} = 1 - \frac{2}{1+i} = i$.

Donc $\frac{z_2 - m}{z_2}$ est un imaginaire pur, par conséquent :

$$(MM_2) \perp (OM_2)$$

b) Vérifier que : $OM_1 = OM_2 = 1$.

On a $OM_1 = |z_1| = |e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}| = 1$. Donc $OM_1 = 1$

On a $R(M_1) = M_2$ donc $OM_1 = OM_2$. Alors

$$OM_1 = OM_2 = 1$$

c) Déterminer la nature du quadrilatère OM_1MM_2 .

★ On a d'après la règle de Leibniz : $z_1 + z_2 = \frac{2}{m}$ donc $z_1 + z_2 = m$, d'où $m - z_2 = z_1$. Alors $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_2M}$ par conséquent le quadrilatère OM_1MM_2 est un parallélogramme.

★

— $R(M_1) = M_2 \Rightarrow \overrightarrow{(OM_1, OM_2)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow (OM_1) \perp (OM_2)$

— $(MM_1) \perp (OM_1)$ (d'après 2/a) Partie II)

— $(MM_2) \perp (OM_2)$ (d'après 2/a) Partie II)

Alors le quadrilatère OM_1MM_2 Possède trois angles droits, par conséquent le quadrilatère OM_1MM_2 est un rectangle.

★ Comme $OM_1 = OM_2$, alors deux côtés adjacents du rectangle OM_1MM_2 ont la même longueur, alors OM_1MM_2 est un carré. ■

3/ Soit H le point d'affixe $h = \frac{-i}{\sqrt{2}\sin(\theta)}e^{i(2\theta)}$.

Pour tout nombre complexe z , on désigne par $Re(z)$ sa partie réelle.

a) Montrer que $Re(m - h) = 0$ et que $Re(1 - h\bar{m}) = 0$

$$\star \text{ On a } h = \frac{-i}{\sqrt{2}\sin(\theta)}e^{i(2\theta)} = \frac{-i(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))}{\sqrt{2}\sin(\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{2}\sin(\theta)} - \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2}\sin(\theta)}i$$

$$\text{Donc } Re(h) = \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{2}\sin(\theta)} = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{2}\sin(\theta)} = \sqrt{2}\cos(\theta)$$

$$\text{Et on a } m = \sqrt{2}e^{i\theta} = \sqrt{2}\cos(\theta) + \sqrt{2}\sin(\theta)i$$

$$\text{Donc } Re(m) = \sqrt{2}\cos(\theta)$$

$$\text{Alors } Re(h - m) = Re(h) - Re(m) = \sqrt{2}\cos(\theta) - \sqrt{2}\cos(\theta) = 0$$

$$\text{D'où } Re(h - m) = 0$$

$$\star \text{ On a } h\bar{m} = \frac{-ie^{i(2\theta)}}{\sqrt{2}\sin(\theta)}(\sqrt{2}e^{-i\theta}) = \frac{-ie^{i\theta}}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}i = 1 - i\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\text{Donc } Re(h\bar{m}) = 1$$

$$\text{Par suite } Re(1 - h\bar{m}) = 1 - Re(h\bar{m}) = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{Ainsi : } Re(1 - h\bar{m}) = 0.$$

b) Montrer que $Re\left(\frac{a-h}{m+1}\right) = 0$.

$$\text{On a } \frac{a-h}{m+1} = \frac{1-h}{m+1} = \frac{(1-h)(\bar{m}+1)}{(m+1)(\bar{m}+1)} = \frac{1-\bar{m}h+\bar{m}-h}{|m+1|^2}$$

$$\text{Comme } |m+1|^2 \in \mathbb{R}, \text{ alors } Re\left(\frac{a-h}{m+1}\right) = \frac{Re(\bar{m}-h)}{|m+1|^2} + \frac{Re(1-\bar{m}h)}{|m+1|^2}$$

$$\text{Comme } Re(1-\bar{m}h) = 0 \text{ et } Re(\bar{m}-h) = Re(\bar{m}) - Re(h) = Re(m) - Re(h) = Re(m-h) = 0$$

$$\text{Alors } Re\left(\frac{a-h}{m+1}\right) = 0$$

c) En déduire que $(MH) \perp (AB)$ et que $(AH) \perp (MB)$

$$\star \text{ On a } \frac{z_A - z_H}{z_M - z_B} = \frac{a-h}{m+1}$$

$$\text{Comme } Re\left(\frac{a-h}{m+1}\right) = 0 \text{ alors } \frac{a-h}{m+1} \text{ est un imaginaire pur. Donc } (AH) \perp (MB).$$

$$\star \text{ On a } \frac{z_M - z_H}{z_A - z_B} = \frac{m-h}{2}$$

$$\text{Or } Re(m-h) = 0, \text{ donc } Re\left(\frac{m-h}{2}\right) = 0. \text{ Par conséquent } \frac{m-h}{2} \text{ est un imaginaire pur.}$$

$$\text{D'où } (MH) \perp (AB)$$

4/ a) Montrer que : $\frac{h-z_1}{z_2-z_1} = \frac{1}{2}(1 - \cotan(\theta))$

$$\text{On a } z_2 - z_1 = \frac{m(1+i)}{2} - \frac{m(1-i)}{2} = im. \text{ Donc } \frac{h-z_1}{z_2-z_1} = \frac{h-z_1}{im} = \frac{h}{im} - \frac{z_1}{im}$$

$$\text{On a } \frac{z_1}{im} = \frac{1-i}{2i} = \frac{-1}{2} - \frac{i}{2} \text{ et on a : } \frac{h}{im} = \frac{\frac{-ie^{i(2\theta)}}{\sqrt{2}\sin(\theta)}}{i\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{-e^{i\theta}}{2\sin(\theta)} = \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{1}{2}i.$$

$$\text{Alors } \frac{h-z_1}{z_2-z_1} = \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cotan(\theta)$$

Ainsi : $\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2} (1 - \cotan(\theta)).$ ■

b) En déduire que les points H , M_1 et M_2 sont alignés

On a $\frac{z_H - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2} (1 - \cotan(\theta))$, donc $\frac{z_H - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$, par conséquent les points H , M_1 et M_2 sont alignés. ■

Exercice 3

Partie I :

A- On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante (F) : $5u - 9v = 1$

1/ Donner une solution particulière (u_0, v_0) dans $\mathbb{N}^2$ de (F)

On vérifie facilement que $5 \wedge 9 = 1$, alors cette équation admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Le couple $(2, 1)$ vérifie l'équation : $5 \times 2 - 9 \times 1 = 10 - 9 = 1$. Alors on prend $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$. ■

2/ Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F)

$5u - 9v = 1$ et $5 \times 2 - 9 \times 1 = 1$, donc $5u - 9v = 5 \times 2 - 9 \times 1 \Rightarrow 5(u - 2) = 9(v - 1)$.

Comme 5 et 9 sont premiers entre eux et d'après le théorème de Gauss, alors 5 divise $v - 1$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}/v = 1 + 5k$ et en remplaçant dans l'équation on trouve $u = 2 + 9k$. D'où l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{(2 + 9k, 1 + 5k)/k \in \mathbb{Z}\}$. ■

3/ Vérifier que : $5^{u_0} \equiv 6[19]$

On a $u_0 = 2 \Rightarrow 5^{u_0} = 5^2 = 25 = 19 + 6 \Rightarrow 5^{u_0} \equiv 6[19]$. ■

B- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante (E) : $x^{2026} \equiv 5[19]$

1/ Soit x une solution de l'équation (E)

a) Montrer que x et 19 sont premiers entre eux.

Sachant que 19 est un entier premier, pour montrer que x et 19 sont premiers entre eux il suffit de montrer que 19 ne divise pas x .

Procédons par l'absurde et supposons que 19 divise x et que $x^{2026} \equiv 5[19]$. On a : $19 \mid x \Rightarrow 19 \mid x^{2026} \Rightarrow 19 \mid 5$ ce qui est absurde car $5 < 19$.

Alors 19 ne divise pas x , par conséquent x et 19 sont premiers entre eux. ■

b) Montrer que : $x^{10} \equiv 5[19]$.

Puisque 19 est premier et 19 ne divise pas x , alors d'après le **petit théorème de Fermat** : $x^{18} \equiv 1[19]$. Et comme $2026 = 18 \times 112 + 10$, alors $x^{2026} \equiv 5[19] \Rightarrow x^{18 \times 112} \times x^{10} \equiv 5[19] \Rightarrow (x^{18})^{112} \times x^{10} \equiv 5[19] \Rightarrow x^{10} \equiv 5[19]$, car $(x^{18})^{112} \equiv 1[19]$

D'où si x est solution de l'équation (E), alors $x^{10} \equiv 5[19]$. ■

c) En déduire que : $x^2 \equiv 6[19]$.

(On pourra utiliser les résultats de la partie A-)

On a $x^{10} \equiv 5[19] \Rightarrow (x^{10})^2 \equiv 5^2[19] \Rightarrow x^{20} \equiv 25[19] \Rightarrow x^{18} \times x^2 \equiv 25[19]$.

Comme $x^{18} \equiv 1[19]$ et $5^2 \equiv 6[19]$. Alors : $x^2 \equiv 6[19]$. ■

d) Montrer que $x \equiv 5[19]$ ou $x \equiv -5[19]$.

$x^{2026} \equiv 5[19] \Rightarrow x^2 \equiv 6[19] \Rightarrow x^2 \equiv 25[19] \Rightarrow x^2 - 25 \equiv 0[19] \Rightarrow (x - 5)(x + 5) \equiv 0[19]$.

Comme 19 est premier, alors $19 \mid (x - 5)$ ou $19 \mid (x + 5)$.

Ainsi : $x \equiv 5[19]$ ou $x \equiv -5[19]$. ■

On a : $x^{2026} = (x^{18})^{112} \times x^{10}$

2/ Montrer que si $x \equiv 5[19]$ ou $x \equiv -5[19]$, alors x est solution de l'équation (E)

★ Pour $x \equiv 5[19]$. On a : $5^{18} \equiv 1[19]$ d'après le petit théorème de Fermat et on a aussi $5^2 \equiv 6[19]$ implique $5^{10} \equiv 6^5[19]$ implique $5^{10} \equiv 5[19]$.

Alors : $x^{2026} \equiv 5[19]$

★ Pour $x \equiv -5[19]$, on a $(-5)^{2026} = 5^{2026}$. Donc $(-5)^{2026} \equiv 5[19]$. Alors $x^{2026} \equiv 5[19]$.

★ Conclusion : Si $x \equiv 5[19]$ ou $x \equiv -5[19]$, alors x est solution de l'équation (E). ■

Partie II :

On considère une urne contenant 100 boules numérotées de 1 à 100, indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard de cette urne.

On considère l'événement V : « Le numéro de la boule tirée est solution de l'équation (E) » .

1/ Montrer que la probabilité de l'événement V est $p = 0,11$.

D'après la partie B de la partie II, $x \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow x \equiv 5[19] \text{ ou } x \equiv -5[19]$. On en déduit que les solutions de l'équation (E) qui sont comprises entre 0 et 100 sont les 11 solutions : 5 ; 14 ; 24 ; 33 ; 43 ; 52 ; 62 ; 71 ; 81 ; 90 ; 100.

Par conséquent, $p(V) = \frac{11}{100} = 0,11$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité de « réalisation de l'événement V au moins une fois », soit strictement supérieure à 0,95

On a une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,11$.

Soit A l'événement « V se réalise au moins une fois » et $\bar{A}$ son événement contraire « V ne se réalise jamais ».

On a alors : $p(\bar{A}) = (1 - p)^n = 0,89^n$, par suite $p(A) = 1 - 0,89^n$.

$p(A) > 0,95 \Leftrightarrow 1 - 0,89^n > 0,95 \Leftrightarrow 0,89^n < 0,05$

En appliquant $\ln$, on a $n \ln(0,89) < \ln(0,05) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,89)} \Leftrightarrow n > 25,7$.

Alors La valeur minimale de n pour que la probabilité de la réalisation de l'événement V au moins une fois soit supérieure strictement à 0,95 est $n = 26$.

Exercice 4

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$

1/ Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) \times M(y) = M(x+y)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
 M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y^2 & 1-y & y \\ y^2+2y & -y & y+1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2+(1-x)y^2+x(y^2+2y) & (1-x)(1-y)-xy & (1-x)y+x(y+1) \\ x^2+2x-xy^2+(x+1)(y^2+2y) & -x(1-y)-y(x+1) & -xy+(x+1)(y+1) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2+y^2+2xy & 1-x-y & x+y \\ x^2+2x+2xy+y^2+2y & -x-y & x+y+1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (x+y)^2 & 1-(x+y) & (x+y) \\ (x+y)^2+2(x+y) & -(x+y) & (x+y)+1 \end{pmatrix} \\
 &= M(x+y)
 \end{aligned}$$

D'où : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) \times M(y) = M(x+y)$. ■

2/ On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = M(x)$.

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}), \times)$ et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$

★ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x+y) = M(x+y) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$, d'après le résultat de la question 1/.

Alors φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

★ Pour montrer que $\varphi(\mathbb{R}) = E$ il suffit de montrer que $E \subset \varphi(\mathbb{R})$.

Soit $M \in E \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}) : M = M(x) = \varphi(x) \Rightarrow M \in \varphi(\mathbb{R})$.

Donc $(\forall M \in E) (\exists x \in \mathbb{R}), M = \varphi(x)$. Par conséquent, $E \subset \varphi(\mathbb{R})$.

D'où : $\varphi(\mathbb{R}) = E$. ■

b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif

Puisque φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}), \times)$ et $\varphi(\mathbb{R}) = E$ et $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif, alors $(E, \times)$ est un groupe commutatif. ■

3/ On munit E de la loi de composition interne T définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) T M(y) = M(2xy)$

a) Montrer que $(E - \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.

★ T est associative.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(M(x) T M(y)) T M(z) = M(2xy) T M(z) = M(4xyz)$.

Et $M(x) T (M(y) T M(z)) = M(x) T M(2yz) = M(4xyz)$.

Alors $(M(x) T M(y)) T M(z) = M(x) T (M(y) T M(z))$. Par conséquent T est associative dans $E - \{I\}$

★ T est commutative.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x) T M(y) = M(2xy) = M(2yx) = M(y) T M(x)$ donc T est commutative dans $E - \{I\}$.

★ T admet un élément neutre.

Soit Déterminons $e \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on ait : $M(x) T M(e) = M(x)$.

$M(x) T M(e) = M(x) \Leftrightarrow M(2xe) = M(x) \Leftrightarrow 2xe = x \Leftrightarrow x(2e - 1) = 0 \Leftrightarrow e = \frac{1}{2}$.

Donc $M(\frac{1}{2})$ est l'élément neutre de T dans $E - \{I\}$.

★ Tout élément de $E - \{I\}$ admet un symétrique dans $E - \{I\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ déterminons $y \in \mathbb{R}^*$ tel que $M(x) T M(y) = M(\frac{1}{2})$.

$M(x)TM(y) = M(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow M(2xy) = M(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow 2xy = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4x}$, et comme $M(\frac{1}{4x}) \in E - \{I\}$ alors tout élément de $E - \{I\}$ admet un symétrique pour la loi T dans $E - \{I\}$.

★ **Conclusion :**

$(E - \{I\}, T)$ est un groupe commutatif. ■

b) Montrer que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

Puisque $(E, \times)$ est un groupe commutatif et $(E - \{I\}, T)$ est un groupe commutatif, pour montrer que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif il suffit de montrer que T est distributive par rapport à $\times$ dans E .

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $M(x)T(M(y) \times M(z)) = M(x)TM(y + z) = M(2x(y + z)) = M(2xy + 2xz) = M(2xy) \times M(2xz) = (M(x)TM(y)) \times (M(x)TM(z))$. (CQFD).

Alors $(E, \times, T)$ est un corps commutatif. ■

4/ Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $(M(x))^n = \underbrace{M(x) \times M(x) \times \dots \times M(x)}_{n \text{ fois}}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (M(x))^n = M(nx)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (M(x))^n = M(nx)$.

★ **Initialisation**

Pour $n = 1$ on a $(M(x))^1 = M(x) = M(1 \times x)$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

★ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $(M(x))^n = M(nx)$ et montrons que $(M(x))^{n+1} = M((n+1)x)$.

On a $(M(x))^{n+1} = (M(x))^n \times M(x) = M(nx) \times M(x) = M(nx + x) = M((n+1)x)$.

D'où : $(M(x))^{n+1} = M((n+1)x)$.

★ **Conclusion**

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (M(x))^n = M(nx)$

b) Résoudre dans E l'équation : $X^3 - X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$X^3 - X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M(x)^3 - M(x)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(3x) - M(2x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 4x^2 = 5 \\ 1 - 3x - (1 - 2x) = 1 \\ 3x - 2x = -1 \\ 9x^2 + 6x - 4x^2 - 4x = 3 \\ -3x + 2x = 1 \\ 3x + 1 - 2x - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$