



CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHS

Session Normale 2026

2 BAC PC-SVT S. EL JAAFARI



Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1, 0, 1)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(-1, 1, 2)$ et $D(2, 7, -4)$.

Soit (Δ) la droite passant par le point D et dirigée par le vecteur $\vec{u}(2, 1, 2)$.

- 1/ a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

On a $\overrightarrow{AB}(-2, 2, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(0, 1, 1)$.

$$\text{Alors : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (2-1)\vec{i} - (-2-0)\vec{j} + (-2-0)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}. \quad \blacksquare$$

- b) Dédurre que $x + 2y - 2z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

Un vecteur normal au plan (ABC) est $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

Donc $\vec{n}(1, 2, -2)$ d'après le résultat de la question 1/a).

Alors une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + 2y - 2z + d = 0$.

Comme $A(-1, 0, 1)$ est un point du plan (ABC) , donc $-1 + 0 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$. Par conséquent $(ABC) : x + 2y - 2z + 3 = 0$. $\blacksquare$

- c) Calculer $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ et déduire que la droite (Δ) est parallèle au plan (ABC) .

On a $\vec{u}(2, 1, 2)$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1, 2, -2)$, donc $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-2) = 2 + 2 - 4 = 0$.

$$\text{Donc } \vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0. \quad \blacksquare$$

Par suite les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, alors la droite (Δ) est parallèle au plan (ABC) .

Or la droite (Δ) passe par le point D et comme D n'appartient pas au plan (ABC) .

Alors la droite (Δ) est strictement parallèle à (ABC) . $\blacksquare$

- 2/ Soit (S) la sphère de centre $\Omega(0, 3, 0)$ et tangente à la droite (Δ) .

- a) Vérifier que $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0$ et déduire que le rayon de la sphère (S) est égale à 6.

On a $\overrightarrow{\Omega D}(2, 4, -4)$ et $\vec{u}(2, 1, 2)$, alors $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 2 \times 2 + 4 \times 1 + (-4) \times 2 = 4 + 4 - 8 = 0$.

$$\text{D'où : } \overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0. \quad \blacksquare$$

On sait que D est un point de la droite (Δ) , et puisque $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0$, alors la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point D , donc le rayon de la sphère (S) est $R = \Omega D = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$.

Donc Le rayon de la sphère (S) est égale à 6. $\blacksquare$

- b) Calculer $d(\Omega, (ABC))$ et déduire que (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r = 3\sqrt{3}$.

$$\text{On a } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|0 + 2 \times 3 - 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3. \quad \blacksquare$$

$$\text{Donc } d(\Omega, (ABC)) = 3.$$

On sait que le rayon de la sphère (S) est $R = 6$ et $d(\Omega, (ABC)) = d = 3$. Donc $d < R$ par conséquent le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

D'où : le rayon du cercle (Γ) est $r = 3\sqrt{3}$. ■

- c) Vérifier que $\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que le point C est le centre du cercle (Γ) .

On sait que $C(-1, 1, 2)$ et $\Omega(0, 3, 0)$, alors $\overrightarrow{C\Omega}(1, 2, -2)$.

Or $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1, 2, -2)$.

Alors $\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. ■

Par suite la droite $(C\Omega)$ est perpendiculaire au plan (ABC) et se coupent en C , alors C est le centre du cercle (Γ) . ■

Exercice 2

On considère dans le plan complexe les points A , B et C d'affixes respectives : $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $b = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $c = 1$.

- 1/ a) Ecrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique

$$\text{On a } |a| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\text{Soit } \theta \text{ un argument de } a, \text{ on a } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Donc $\theta \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

Ainsi La forme trigonométrique de a est : $a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

- b) Vérifier que $b^2 = a$ et que $b\bar{b} = 1$. ■

★ Calculons b^2 :

$$b^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Or, on sait que $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = a$.

Donc, $b^2 = a$. ■

★ Calculons $b\bar{b}$:

La propriété des nombres complexes indique que $z\bar{z} = |z|^2$. Le module de $b = e^{i\frac{\pi}{12}}$ est 1.

Donc, $b\bar{b} = 1$. ■

- c) Montrer que $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$.

★ Calculons $a - 1$:

$$a - 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{1}{2}i$$

★ Calculons $(2 - \sqrt{3})i(a + 1)$:

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})i(a + 1) &= (2 - \sqrt{3})i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 1\right) \\ &= (2 - \sqrt{3})i\left(\frac{\sqrt{3} + 2}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= (2 - \sqrt{3})i \times \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) + (2 - \sqrt{3})i \times \frac{1}{2}i \\ &= \frac{2^2 - (\sqrt{3})^2}{2}i + \frac{2 - \sqrt{3}}{2}i^2 \\ &= \frac{4 - 3}{2}i - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3} - 2}{2} \end{aligned}$$

★ Conclusion : $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$. ■

2/ Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D le point d'affixe d tel que $T(A) = D$.

a) Vérifier que $d = b(b + \bar{b})$ et déduire que les points O , B et D sont alignés.

★ Vérification de $d = b(b + \bar{b})$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ est $z_{\overrightarrow{OC}} = c - 0 = 1 - 0 = 1$.

L'expression complexe de la translation est $z' = z + 1$. Puisque $T(A) = D$, donc $d = a + 1$.

D'après la question précédente, $a = b^2$ et $1 = b\bar{b}$. En remplaçant, on obtient :

$$d = b^2 + b\bar{b} = b(b + \bar{b})$$

★ Dédution de l'alignement des points O , B et D

$$\text{On a } \frac{d - 0}{b - 0} = \frac{d}{b} = \frac{b(b + \bar{b})}{b} = b + \bar{b} = 2\operatorname{Re}(b) = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Donc $\frac{d}{b} \in \mathbb{R}$, par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.

D'où **Les points O , B et D sont alignés.** ■

b) Déduire que $\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$.

On a $d = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \times b$. Le terme $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est un réel strictement positif.

$$\text{Donc } \arg(d) \equiv \arg(b) [2\pi] \Leftrightarrow \arg(d) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]. \quad \blacksquare$$

3/ a) Vérifier que $\frac{a - c}{d} = (2 - \sqrt{3})i$ et déduire que les droites (AC) et (OD) sont perpendiculaires.

★ Vérifions que $\frac{a - c}{d} = (2 - \sqrt{3})i$

Nous avons $c = 1$ et $d = a + 1$. Remplaçons dans la fraction :

$$\frac{a - c}{d} = \frac{a - 1}{a + 1}$$

D'après la question 1/ c), on sait que $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$.

$$\frac{a - c}{d} = \frac{(2 - \sqrt{3})i(a + 1)}{a + 1} = (2 - \sqrt{3})i$$

★ Dédution de $(AC) \perp (OD)$

L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{CA}$ correspond à :

$$\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \arg\left(\frac{a - c}{d - 0}\right) \equiv \arg\left((2 - \sqrt{3})i\right) [2\pi]$$

Puisque $(2 - \sqrt{3}) > 0$, le nombre $(2 - \sqrt{3})i$ est un imaginaire pur avec une partie imaginaire positive. Son argument est $\frac{\pi}{2}$.

$$\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Alors les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux, par conséquent **les droites (AC) et (OD) sont donc perpendiculaires.** ■

b) Montrer que le quadrilatère $OCDA$ est un losange.

On a $T(A) = D$, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}$, alors le quadrilatère $OCDA$ est un parallélogramme.

De plus, d'après la question précédente, ses diagonales (AC) et (OD) sont perpendiculaires.

Comme « un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange », alors **le quadrilatère $OCDA$ est un losange.** ■

Exercice 3

Une urne contient **cinq boules blanches, quatre boules noires et deux boules vertes.**

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et **simultanément trois boules de l'urne.**

On considère les événements suivants :

A : « Les trois boules tirées sont de même couleur. »

B : « Tirer au moins une boule verte. »

1/ Nombre total de tirages possibles :

$$C_{11}^3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

a) Montrer que $p(A) = \frac{14}{165}$.

L'événement A se réalise si l'on tire :

- 3 blanches : $C_5^3 = 10$ cas possibles,
- 3 noires : $C_4^3 = 4$ cas possibles,
- 3 vertes : $C_2^3 = 0$ cas (aucun cas possible).

Donc le nombre de cas favorables est $10 + 4 = 14$. Ainsi :

$$p(A) = \frac{14}{165}$$

b) Calculer $p(\bar{B})$, la probabilité de l'événement contraire de B, et déduire que $p(B) = \frac{27}{55}$. ■

L'événement $\bar{B}$ signifie « ne tirer aucune boule verte », c'est-à-dire tirer 3 boules parmi les 9 non-vertes (5 blanches + 4 noires).

$$p(\bar{B}) = \frac{C_9^3}{C_{11}^3} = \frac{84}{165} = \frac{28}{55}$$

$$\text{Donc } p(\bar{B}) = \frac{28}{55}.$$

Par conséquent :

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{28}{55} = \frac{27}{55}$$

$$\text{Alors : } p(B) = \frac{27}{55}$$

2/ Calculer la probabilité $p(A \cup B)$.

On utilise la formule :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

L'événement $A \cap B$ signifie « les 3 boules sont de même couleur » ET « au moins une est verte ». La seule possibilité serait 3 vertes, mais il n'y en a que 2. Donc :

$$p(A \cap B) = 0$$

$$\text{Alors } p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{14}{165} + \frac{27}{55} = \frac{95}{165} = \frac{19}{33}$$

$$\text{Ainsi : } p(A \cup B) = \frac{19}{33}.$$

3/ On considère la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées

- a) Copier et compléter le tableau ci-dessous, qui représente la loi de probabilité de la variable aléatoire X

X est le nombre de boules vertes tirées. Donc X peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2.

— Pour $X = 0$ (aucune verte) :

$$p(X = 0) = \frac{C_9^3}{C_{11}^3} = \frac{84}{165} = \frac{28}{55}$$

— Pour $X = 1$ (exactement une verte) :

$$p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_9^2}{C_{11}^3} = \frac{2 \times 36}{165} = \frac{72}{165} = \frac{24}{55}$$

— Pour $X = 2$ (exactement deux vertes) :

$$p(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_9^1}{C_{11}^3} = \frac{1 \times 9}{165} = \frac{9}{165} = \frac{3}{55}$$

Tableau de la loi de probabilité :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{28}{55}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{3}{55}$

Vérification : $\frac{28 + 24 + 3}{55} = \frac{55}{55} = 1.$

- b) Montrer que l'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{6}{11}$.

Par définition :

$$E(X) = \sum_{i=0}^2 x_i \cdot p(X = x_i)$$

$$E(X) = 0 \times \frac{28}{55} + 1 \times \frac{24}{55} + 2 \times \frac{3}{55} = \frac{24}{55} + \frac{6}{55} = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}$$

Ainsi : $E(X) = \frac{6}{11}.$

Problème

Partie 1 :

On considère les fonctions numériques g et h définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x \quad \text{et} \quad h(x) = x^2 e^{x-1}$$

- 1/ a) Calculer $g(1)$ et $h(1)$.

$$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1. \text{ Donc } g(1) = 1.$$

$$h(1) = 1^2 e^{1-1} = 1 \times e^0 = 1. \text{ Donc } h(1) = 1.$$

- b) Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. Par conséquent $S = \{e\}$. ■

- 2/ Le graphique ci-dessous représente les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions g et h dans un même repère orthonormé

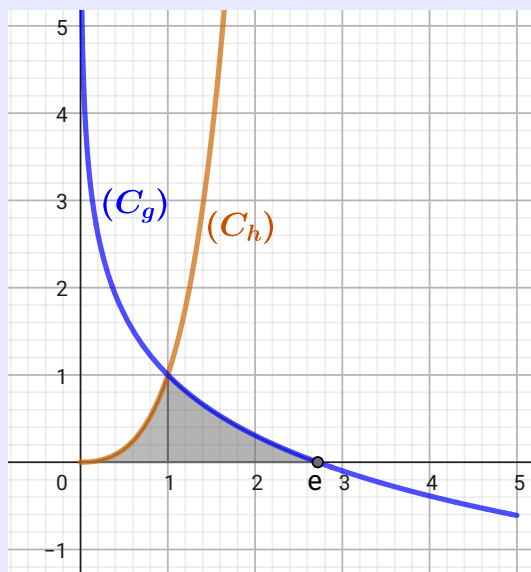


FIGURE 1 –

- a) Justifier graphiquement que :

★ Pour tout x de $]0, 1[$: $h(x) - g(x) < 0$

Sur l'intervalle $]0, 1[$, la courbe (C_h) est en dessous de la courbe (C_g) .

Donc $\forall x \in]0, 1[$: $h(x) < g(x)$, soit $h(x) - g(x) < 0$. ■

★ et Pour tout x de $]1, +\infty[$: $h(x) - g(x) > 0$.

Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, la courbe (C_h) est au dessus de la courbe (C_g) .

Donc $\forall x \in]1, +\infty[$: $h(x) > g(x)$, soit $h(x) - g(x) > 0$. ■

- b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e g(x) dx = e - 2$

$$\text{On a } \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (1 - \ln x) dx = \int_1^e 1 dx - \int_1^e \ln x dx = [x]_1^e - \int_1^e \ln x dx = e - 1 - \int_1^e \ln x dx$$

Calculons $\int_1^e \ln x dx$ par une intégration par parties :

$$\text{Posons } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\text{Donc } \int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e - \int_1^e 1 dx = e - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1$$

$$\text{D'où : } \int_1^e g(x) dx = (e - 1) - 1 = e - 2. \quad \blacksquare$$

- c) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto e^{x-1}(x^2 - 2x + 2)$ est une primitive de la fonction h sur $]0, +\infty[$, puis calculer $\int_0^1 h(x) dx$

★ Vérification de la primitive

Soit $H(x) = e^{x-1}(x^2 - 2x + 2)$. On a

$$\begin{aligned} H'(x) &= e^{x-1}(x^2 - 2x + 2) + e^{x-1}(2x - 2) = e^{x-1}(x^2 - 2x + 2 + 2x - 2) \\ &= e^{x-1}(x^2) = x^2 e^{x-1} = h(x) \end{aligned}$$

Donc H est bien une primitive de h sur $]0, +\infty[$. ■

★ Calcul de $\int_0^1 h(x) dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x) dx &= \int_0^1 x^2 e^{x-1} dx = \left[e^{x-1} (x^2 - 2x + 2) \right]_0^1 \\ &= e^0(1 - 2 + 2) - e^{-1}(0 - 0 + 2) = 1 \times (1) - e^{-1} \times 2 = 1 - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

Donc : $\int_0^1 h(x) dx = 1 - \frac{1}{e}$. ■

d) Calculer l'aire du domaine hachuré sur le graphique précédent (en unité d'aire)

L'aire A du domaine hachuré est la somme des aires A_1 et A_2 , où A_1 est l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_h) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ et A_2 est l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_g) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

★ Calcul de l'aire A_1

$A_1 = \int_0^1 h(x) dx = 1 - \frac{1}{e}$. (d'après la question 2/c)). Donc

$$A_1 = \left(1 - \frac{1}{e}\right) u.a.$$

★ Calcul de l'aire A_2

$A_2 = \int_1^e g(x) dx = e - 2$ (d'après la question 2/b)). Donc

$$A_2 = (e - 2) u.a.$$

★ Calcul de l'aire A

$A = A_1 + A_2 = 1 - \frac{1}{e} + e - 2 = e - \frac{1}{e} - 1$. Donc

L'aire du domaine hachuré est égale à $\left(e - \frac{1}{e} - 1\right) u.a.$

Partie 2 :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

On a $f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-1} = e^{-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-1} - (-\infty) = +\infty$. ■

Interprétation géométrique : La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une **asymptote verticale** d'équation $x = 0$. ■

b) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On a $f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$. ■

- c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

On a $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{x-1}}{x} - \frac{\ln x}{x^2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{e} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$.

Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty + 0 = +\infty$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. ■

Interprétation géométrique : La courbe (C_f) admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** au voisinage de $+\infty$. ■

- 2/ a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}$.

On a : $f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}$

Dérivons :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-1} - \frac{x^{\frac{1}{x}} - \ln x}{x^2} = e^{x-1} - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 e^{x-1} + \ln x - 1}{x^2} = \frac{x^2 e^{x-1} - (1 - \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{h(x) - g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

car $h(x) = x^2 e^{x-1}$ et $g(x) = 1 - \ln x$.

Alors $f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}$. ■

- b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.

(On peut utiliser la question 2/a) de la partie 1.)

D'après la question 2.a de la partie 1, on a :

* $h(x) - g(x) < 0$ sur $]0, 1[$

* $h(x) - g(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$

Et comme $x^2 > 0$ pour tout $x > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $h(x) - g(x)$.

Donc :

* $f'(x) < 0$ sur $]0, 1[$

* $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$

* $f'(1) = \frac{h(1) - g(1)}{1^2} = \frac{1-1}{1} = 0$

* $f(1) = 1$

Tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 1	↗ $+\infty$

FIGURE 2 –

- c) Dédurre que pour tout x de $]0, +\infty[$, $e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}$. ■

D'après le tableau de variations, la fonction f admet un minimum absolu en $x_0 = 1$ qui est $f(1) = 1$.

Donc pour tout $x \in]0, +\infty[: f(x) \geq 1$

C'est-à-dire, pour tout $x \in]0, +\infty[: e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \geq 1$

D'où : $e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}$. ■

3/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α telle que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

(On donne $f(2) \simeq 2,37$ et $f(\frac{3}{2}) \simeq 1,38$).

Pour tout x de $]0, +\infty[$, posons $w(x) = f(x) - x$. Alors : $f(x) = x \Leftrightarrow w(x) = 0$.

Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction w sur l'intervalle $[\frac{3}{2}, 2]$.

Comme la fonction f est continue sur l'intervalle $[\frac{3}{2}, 2]$, alors la fonction w est continue sur $[\frac{3}{2}, 2]$, et on a :

$$* \quad w(\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) - \frac{3}{2} \simeq 1,38 - 1,5 \simeq -0,12 < 0$$

$$* \quad w(2) = f(2) - 2 \simeq 2,37 - 2 \simeq 0,37 > 0.$$

Alors d'après le (TVI), l'équation $w(x) = 0$ admet une solution α telle que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = x$ admet une solution α telle que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$. ■

4/ Soit φ la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
(L'expression de $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas demandée).

D'après le tableau de variations, la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Donc la fonction φ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Donc φ est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, par conséquent elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur l'intervalle : $J = \varphi([1, +\infty[) = [\varphi(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)[= [1, +\infty[$

Ainsi φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$. ■

b) Justifier que la fonction φ^{-1} est strictement croissante sur l'intervalle J .

Le sens de variation de φ^{-1} sur l'intervalle $J = J = [1, +\infty[$ est le même que celui de la fonction φ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Et puisque la fonction φ est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$, alors la fonction φ^{-1} est aussi strictement croissante sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$. ■

5/ Le graphique ci-dessous représente la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ de la fonction φ et la droite Δ d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

a) Justifier graphiquement que pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi(x) \leq x$.

D'après le graphique, sur l'intervalle $[1, \alpha]$, la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ est située en dessous de la droite Δ d'équation $y = x$.

Donc pour tout $x \in [1, \alpha]$: $\varphi(x) \leq x$. ■

b) Dédurre que pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi^{-1}(x) \geq x$.

D'après la question 5/a) pour tout $x \in [1, \alpha]$: $\varphi(x) \leq x$, et comme la fonction φ^{-1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ en particulier sur $[1, \alpha]$ alors $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \leq \varphi^{-1}(x)$, d'où $x \leq \varphi^{-1}(x)$.

Ainsi pour tout $x \in [1, \alpha]$: $\varphi^{-1}(x) \geq x$. ■

c) Reproduire la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ et tracer la courbe $\mathcal{C}_{\varphi^{-1}}$ de la fonction φ^{-1} dans un même repère orthonormé.

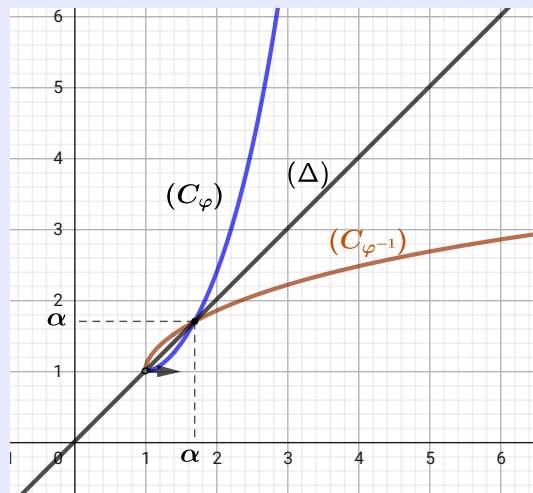


FIGURE 3 –

Partie 3 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 \in]1, \alpha[$ et $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 1/ Montrer par récurrence que $1 < u_n < \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 \in]1, \alpha[$, donc $1 < u_0 < \alpha$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 < u_n < \alpha$ et montrons que $1 < u_{n+1} < \alpha$.

D'après la question 4/b) de la partie 2, la fonction φ^{-1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc $1 < u_n < \alpha \Rightarrow \varphi^{-1}(1) < \varphi^{-1}(u_n) < \varphi^{-1}(\alpha) \Rightarrow 1 < u_{n+1} < \alpha$ car $\varphi^{-1}(1) = 1$ et $\varphi^{-1}(\alpha) = \alpha$.

Ainsi : $1 < u_{n+1} < \alpha$.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 < u_n < \alpha$.

- 2/ Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(On peut utiliser la question 5/b) de la partie 2).

D'après la question 5/b) de la partie 2, pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi^{-1}(x) \geq x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. on a $u_n \in]1, \alpha[$, en posant $x = u_n$ on a alors $\varphi^{-1}(u_n) \geq u_n$, par suite $u_{n+1} \geq u_n$.

Alors la suite (u_n) est croissante.

- 3/ En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

* Montrons que la suite est convergente :

On a montré que la suite (u_n) est majorée par α et qu'elle est croissante, alors d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

* Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

On a $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$. et on a les 4 propriétés :

- φ^{-1} est continue sur $]1, \alpha[$
- $\varphi^{-1}(]1, \alpha[) =]1, \alpha[$
- $u_0 \in]1, \alpha[$
- (u_n) est convergente

Alors la limite de (u_n) est une solution de l'équation $\varphi^{-1}(x) = x$.

D'après les questions précédentes $\varphi^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \alpha$. Or la suite est croissante donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.