

Devoir Surveillé N° 1 S_I

Exercice 1 :

Les questions sont indépendantes.

- ① Calculer les limites suivantes (1 + 1 + 1 + 1 pt)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - x}.$$

- ② Ordonner les nombres suivants (1pt)

$$a = \sqrt[3]{3}, \quad b = \sqrt[6]{5}, \quad c = \sqrt[3]{4}, \quad d = \sqrt{2}.$$

- ③ Résoudre dans $\mathbb{R}$ (2 pts)

$$(3x - 1)^{\frac{2}{3}} = 4; \quad \sqrt[3]{1 - x} > 3.$$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1}, & x \neq 1, \\ f(1) = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

- ① Montrer que f est continue en 1 (1,5 pt)

- ② Montrer que f est continue sur $[1; +\infty[$ (1 pt)

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x + 1$.

- ① Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-1; 0]$ (1 pt)

- ② Donner un autre encadrement de α d'amplitude 0,5 (0,5 pt)

- ③ Donner le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ (0,5 pt)

- ④ a Vérifier que $\alpha^2 + 1 = -\frac{1}{\alpha}$ (0,5 pt)

- b En déduire que : $f(x) = (x - \alpha) \left(x^2 + \alpha x - \frac{1}{\alpha} \right)$ (1 pt)

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ avec $x \in I =]-\infty; -2]$.

1 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $f(-2)$ (1,25 pt)

2 a Montrer que $(\forall x \in I), f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ (1 pt)

b En déduire que f est strictement croissante sur I (0,5 pt)

3 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer (0,75 pt)

4 Montrer que $(\forall x \in J), f^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$ (2 pt)