

Les Nombres Complexes

Résumé complet de cours

Programme de 2^{ème} année Bac
Filières Sciences Expérimentales (PC / SVT)

Au programme :

- ◆ Calcul dans l'ensemble des nombres complexes
- ◆ Conjugué d'un nombre complexe
- ◆ Module d'un nombre complexe
- ◆ Forme trigonométrique d'un nombre complexe
- ◆ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul
- ◆ Équations du second degré à coefficients réels
- ◆ Transformations usuelles dans le plan complexe
- ◆ Alignement des points, nature des triangles, nature des quadrilatères , cocyclicité de quatre points

1. Calcul dans l'ensemble $\mathbb{C}$

Définition

- ♦ $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$ est l'ensemble des nombres complexes.
- ♦ $z = a + ib ; (a, b) \in \mathbb{R}^2$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z .
- ♦ Le nombre réel a s'appelle **la partie réelle de z** et est notée : $\mathcal{Re}(z)$.
- ♦ Le nombre réel b s'appelle **la partie imaginaire de z** et est notée $\mathcal{Im}(z)$.

1.1 Égalité de deux nombres complexes

Proposition : 1

- $z = z' \Leftrightarrow \mathcal{Re}(z) = \mathcal{Re}(z') \text{ et } \mathcal{Im}(z) = \mathcal{Im}(z')$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{Im}(z) = 0$.
- $z \in i\mathbb{R}$ (z imaginaire pur) $\Leftrightarrow \mathcal{Re}(z) = 0$.

1.2 Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Proposition : 2

Soient a, a', b, b' et k des nombres réels. Alors :

- $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
- $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- Si $a + ib \neq 0$, alors : $\frac{a' + ib'}{a + ib} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + i\frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}$.
- $k(a + ib) = (ka) + i(kb)$.
- si $n \in \mathbb{N}$, alors : $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ et $i^{4n+3} = -i$.

1.3 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définition : 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- À chaque nombre complexe $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ correspond un unique point $M(a, b)$ appelé **image de z** .
- À chaque point $M(a, b)$ du plan correspond un unique nombre complexe $z = a + ib$, appelé **affixe du point $M(a, b)$** noté $z = aff(M)$.
- Le plan ainsi défini est appelé **le plan complexe**.
- Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'axe des abscisses est appelé **l'axe des réels** et l'axe des ordonnées est appelé **l'axe des imaginaires**.

Définition : 2

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points du plan complexe, et I le milieu du segment $[AB]$ et G le centre de gravité du triangle ABC). Alors :

- L'affixe du point I est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- L'affixe du point G est $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ et α et β deux nombres réels. Alors :

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$.
- $aff(\alpha\vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$.
- $aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha \times aff(\vec{u}) + \beta \times aff(\vec{v})$.

2. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par : $\bar{z} = a - ib$.

Proposition : 1

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

- $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$.
- $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- $\bar{\bar{z}} = z$.
- $z \times \bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$.
- $z \in \mathbb{R}$ (z est un réel) $\Leftrightarrow \bar{z} = z$.
- $z \in i\mathbb{R}$ (z est un imaginaire pur) $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Proposition : 2

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\overline{(z + z')} = \bar{z} + \bar{z}'$.
- $\overline{(z \times z')} = \bar{z} \times \bar{z}'$.
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.
- $\overline{(\lambda z)} = \lambda \bar{z}$.
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$.
- $\overline{\left(\sum_{k=0}^n z_k\right)} = \sum_{k=0}^n \bar{z}_k$.
- $\overline{\left(\prod_{k=0}^n z_k\right)} = \prod_{k=0}^n \bar{z}_k$.

Proposition : 3

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

- $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.
- $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$

3. Module d'un nombre complexe**Définition**

Soit $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Le module du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre réel positif noté $|z|$ défini par :
 $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition : 1

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \in \mathbb{R}^+$.
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z| = \operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$.
- $|z| = -\operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^-$.
- $|z| = \operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}^+$.
- $|z| = -\operatorname{Im}(z) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}^-$.
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \frac{z'}{z} = \frac{z' \times \bar{z}}{|z|^2}$.

Proposition : 2

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(z_A)$ et $B(z_B)$. Alors :

- $OA = \|\vec{OA}\| = |z_A|$.
- $AB = \|\vec{AB}\| = |z_B - z_A|$

Proposition : 2

Soient z et z' deux nombres complexes, n un entier et k un réel. Alors :

- ♦ $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.
- ♦ $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- ♦ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
- ♦ $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |iz| = \left|\frac{z}{i}\right|$.
- ♦ $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z \times \bar{z}$ et $\bar{z} = \frac{|z|}{z}$.
- ♦ $|z^n| = |z|^n$.
- ♦ $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.
- ♦ $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.
- ♦ $k > 0 \Rightarrow |kz| = k|z|$.
- ♦ $k < 0 \Rightarrow |kz| = -k|z|$.
- ♦ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- ♦ $\left|\sum_{k=0}^n z_k\right| \leq \sum_{k=0}^n |z_k|$.
- ♦ $\left|\prod_{k=0}^n z_k\right| = \prod_{k=0}^n |z_k|$.

4. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans cette section, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

4.1 Argument d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe. On appelle **argument de z** et on note $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Proposition : 1

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul tel que $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Alors il existe au moins un réel θ tel que :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Proposition : 2

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors :

- ♦ $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ♦ $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \arg z = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ♦ $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[\pi] \Leftrightarrow \arg z = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ♦ $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ♦ $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ♦ $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv -\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Proposition : 3

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- | | |
|---|--|
| ♦ $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z [2\pi]$ | ♦ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi]$ |
| ♦ $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi]$ | |
| ♦ $\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$ | ♦ $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg z' - \arg z [2\pi]$ |
| ♦ $\arg\left(\prod_{k=0}^n z_k\right) \equiv \sum_{k=0}^n \arg(z_k) [2\pi]$. | ♦ $\arg(z^n) \equiv n \times \arg z [2\pi]$ |

4.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition

- ♦ Tout nombre complexe non nul z , s'écrit sous forme $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, où θ est un argument de z .
- ♦ L'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée **l'écriture trigonométrique** ou **forme trigonométrique** de z .
- ♦ on note $z = [|z|, \theta]$.
- ♦ Le couple $(|z|, \theta)$ est appelé **le couple de coordonnées polaires du point M d'affixe z** par rapport à l'axe des réels.

Méthode : Donner la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, tel que $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

1) On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) On détermine $\theta \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible, tel que :
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

3) $z = [|z|, \theta]$ est la forme trigonométrique de z .

Proposition

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$. Alors :

$$\blacklozenge \bar{z} = [r, -\theta]$$

$$\blacklozenge -z = [r, \pi + \theta]$$

$$\blacklozenge z \times z' = [r \times r', \theta + \theta']$$

$$\blacklozenge \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right]$$

$$\blacklozenge \frac{z'}{z} = \left[\frac{r'}{r}, \theta' - \theta \right]$$

$$\blacklozenge z^n = [r^n, n\theta]$$

4.3 Angles orientés et arguments des nombres complexes**Proposition**

Soit $\vec{w}$ et $\vec{t}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{t}}$ et soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

$$\blacklozenge \overline{(\vec{u}, \vec{w})} \equiv \arg z_{\vec{w}} [2\pi].$$

$$\blacklozenge \overline{(\vec{w}, \vec{t})} \equiv \arg \left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \right) [2\pi].$$

$$\blacklozenge \overline{(\vec{u}, \overrightarrow{AB})} \equiv \arg (z_B - z_A) [2\pi].$$

$$\blacklozenge \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi].$$

5. Points, triangles et quadrilatères**Proposition : Points alignés - Vecteurs colinéaires - Vecteurs orthogonaux**

Soit $\vec{w}$ et $\vec{t}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{t}}$ et soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que $A \neq B$. Alors :

$$\blacklozenge \text{ Les vecteurs } \vec{w} \text{ et } \vec{t} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \right) \equiv 0 [\pi].$$

$$\blacklozenge \text{ Les points A, B et C sont alignés} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv 0 [\pi].$$

$$\blacklozenge (AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \equiv 0 [\pi].$$

$$\blacklozenge \vec{w} \perp \vec{t} \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

$$\diamond (AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

Proposition : Quatre points cocycliques

Les points A, B, C et D sont **quatre points alignés ou cocycliques**

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}.$$

Proposition : Nature d'un quadrilatère

Soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D . Alors :

$$\diamond ABCD \text{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$$

$$\diamond ABCD \text{ est un rectangle} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$$

$$\diamond ABCD \text{ est un losange} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \left|\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

$$\diamond ABCD \text{ est un carré} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \pm \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Proposition : Nature des triangles

Soit A, B et C des points du plan complexe d'affixes respectives z_A , z_B et z_C . Alors :

$$\diamond ABC \text{ est un triangle isocèle en A} \Leftrightarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A|$$

$$\diamond ABC \text{ est un triangle équilatéral} \Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A| = |z_C - z_B|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_C - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

$$\diamond ABC \text{ est un triangle rectangle en A} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\diamond ABC \text{ est un triangle rectangle et isocèle en A} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$$

6. Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition : Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul, θ un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.

- ◆ On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .
- ◆ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = [1, \theta]$.
- ◆ $z = [r, \theta] \Leftrightarrow z = re^{i\theta}$.
- ◆ L'écriture $re^{i\theta}$ est appelée **la forme ou l'écriture exponentielle de z** .

Proposition

Soit θ et θ' deux nombres réels. Alors :

- ◆ $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta [2\pi]$
- ◆ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- ◆ $e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta$
- ◆ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- ◆ $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$.
- ◆ $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
- ◆ $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)$
- ◆ $e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2ie^{i\frac{\theta+\theta'+\pi}{2}} \sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)$.
- ◆ $1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
- ◆ $1 - e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta-\pi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Proposition : Formule de Moivre - Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- ◆ **Formule de Moivre** : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ou $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.
- ◆ **Formules d'Euler** : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Proposition : Linéarisation de $\cos^n(x)$; $\sin^n(x)$; $\cos^n(x) \times \sin^m(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Linéariser $\cos^n(x)$; $\sin^n(x)$ ou $\cos^n(x) \times \sin^m(x)$ revient à les écrire sous forme

$$\sum_{k=0}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$
Exemple : Linéarisation de $\cos^3 x$ et $\sin^4 x$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- ◆ **Linéarisation de $\cos^3 x$** : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow \cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 =$

$$\frac{e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}}{8} = \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{8} + \frac{3(e^{ix} + e^{-ix})}{8} = \frac{\cos(3x) + 3\cos x}{4}.$$
- ◆ **Linéarisation de $\sin^4 x$** : $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow \sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 =$

$$\frac{e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}}{16} = \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}.$$

7. Équation du second degré à coefficients réels

Définition

- ♦ Une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une équation de la forme

$$a z^2 + b z + c = 0 \quad \text{où} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- ♦ Le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ est son discriminant
 ♦ La forme canonique du trinôme $a z^2 + b z + c$ est donnée par l'expression :

$$a z^2 + b z + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Proposition : Résolution de l'équation (E) : $a z^2 + b z + c = 0$

- ♦ Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- ♦ Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution double :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

- ♦ Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i \sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i \sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Proposition : Relations entre les solutions d'une équation du second degré

- ♦ Soit $(s, p) \in \mathbb{R}^2$, les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant les relations $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 \times z_2 = p \end{cases}$ sont les solutions de l'équation du second degré : $z^2 - s z + p = 0$.

- ♦ Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $a z^2 + b z + c = 0$, alors elles vérifient les relations $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

8. Transformations usuelles dans le plan complexe

8.1 Transformations du plan complexe

Proposition

Une transformation $F : \begin{cases} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{cases}$ est associée à une application $f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = f(z) \end{cases}$ tels que pour tous les points $M(z)$ et $M'(z')$ du plan complexe, on ait : $M' = F(M) \Leftrightarrow z' = f(z)$.
On va nous intéresser à des fonctions affines $f(z) = az + b$.

8.2 Transformations usuelles du plan complexe

8.2.1 Translation

Définition

Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul.

La translation de vecteur $\vec{w}$ est la transformation du plan complexe définie par :

$$T_{\vec{w}} : \begin{cases} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{cases}, \text{ telle que : } \overrightarrow{MM'} = \vec{w}.$$

Proposition : Écriture complexe d'une translation

Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul d'affixe $z_{\vec{w}}$.

L'écriture complexe de la translation $T_{\vec{w}}$ est : $T_{\vec{w}} : z' = z + z_{\vec{w}}$.

8.2.2 Homothétie

Définition

Soit Ω un point du plan complexe et $k \in \mathbb{R}^*$.

L'homothétie h de centre Ω et de rapport k est l'application définie par :

$$h : \begin{cases} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ M \mapsto M' \end{cases}, \text{ telle que } \overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}.$$

Proposition : Écriture complexe d'une homothétie

Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$.

L'écriture complexe de l'homothétie h est : $z' - \omega = k(z - \omega)$.

8.2.3 Rotation

Définition

Soit Ω un point du plan complexe et $\theta \in \mathbb{R}$.

La rotation R de centre Ω et d'angle θ est l'application définie par :

$$R : \begin{cases} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ M \mapsto M' \end{cases}, \text{ telle que } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}.$$

Proposition : Écriture complexe d'une rotation

Soit R la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation R est : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Les transformations dans le plan et les nombres complexes .

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par une transformation dans le plan.

Nature de la transformation	Définition	Écriture complexe
une translation du vecteur $\vec{u}(b)$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
une homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - w) + w$
une rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ ($M \neq \Omega$)	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} z' - w = z - w \\ \arg \left(\frac{z' - w}{z - w} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$ $\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - w) + w$