

Les Suites Numériques

Résumé de cours complet

Fusion du programme de 1^{ère} et 2^{ème} année Bac

Filières Sciences Expérimentales (PC / SVT)

Au programme :

- Généralités, variation, suites bornées
- Suites arithmétiques et géométriques
- Limites de référence et opérations sur les limites
- Théorèmes de convergence monotone
- Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ et théorème du point fixe
- Suites $v_n = f(u_n)$
- Suites arithmético-géométriques et homographiques

1. Généralités sur les suites

Définition

Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Toute application $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **suite numérique**. On note $u(n) = u_n$, appelé **terme général** de la suite (ou terme de rang n). La suite elle-même est notée $(u_n)_{n \in I}$.

Modes de génération d'une suite

- **Forme explicite** : $u_n = f(n)$ — on calcule directement u_n en fonction de n .
- **Forme récurrente** : $u_{n+1} = f(u_n)$, avec un premier terme u_{n_0} donné.

2. Sens de variation d'une suite

Soit (u_n) une suite définie sur I .

Définition : Variation

- (u_n) est **croissante** si pour tout $n \in I$: $u_{n+1} \geq u_n$
- (u_n) est **décroissante** si pour tout $n \in I$: $u_{n+1} \leq u_n$
- (u_n) est **constante** si pour tout $n \in I$: $u_{n+1} = u_n$

Méthode : Étudier le sens de variation

- 1) Étudier le **signe de** $u_{n+1} - u_n$
- 2) Si $u_n > 0$ pour tout n , comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
- 3) **Étude de la fonction associée** : si $u_n = f(n)$, étudier le sens de variation de f sur I ; si f est croissante (resp. décroissante) sur I , alors (u_n) l'est aussi
- 4) **Par récurrence** (indispensable pour les suites définies par récurrence)

3. Suites majorées, minorées, bornées

Définition

- (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in I$: $u_n \leq M$
- (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in I$: $u_n \geq m$
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée

4. Suites arithmétiques

Définition : Suite arithmétique

(u_n) est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ (appelé **raison**) tel que pour tout n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Théorème : Terme général

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0) r$$

Méthode : Démontrer qu'une suite est arithmétique

Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est **constante** (indépendante de n). Cette constante est alors la raison r .

Sens de variation selon le signe de r :

Signe de r	Variation de (u_n)
$r > 0$	croissante
$r < 0$	décroissante
$r = 0$	constante

Théorème : Somme des n premiers termes

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

5. Suites géométriques

Définition : Suite géométrique

(u_n) est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ (appelé **raison**) tel que pour tout n :

$$u_{n+1} = q \cdot u_n$$

Théorème : Terme général

$$u_n = u_{n_0} \cdot q^{n-n_0}$$

Méthode : Démontrer qu'une suite est géométrique

Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est **constant** (indépendant de n), à condition que $u_n \neq 0$ pour tout n .

Sens de variation (si $u_{n_0} > 0$) :

Valeur de q	Variation de (u_n)
$0 < q < 1$	décroissante
$q > 1$	croissante
$q = 1$	constante
$q < 0$	non monotone (alternée)

Théorème : Somme des n premiers termes (pour $q \neq 1$)

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

6. Limites de référence et opérations sur les limites

Limites usuelles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Théorème : Limite d'une suite géométrique (q^n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

Formes indéterminées

Les règles sur les opérations (somme, produit, quotient) des limites sont les mêmes que pour les fonctions. Il faut lever les **formes indéterminées** suivantes :

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}$$

7. Théorèmes de convergence monotone

Théorème : Convergence monotone

- Toute suite **croissante et majorée** converge.
- Toute suite **décroissante et minorée** converge.
- Toute suite **croissante non majorée** tend vers $+\infty$.
- Toute suite **décroissante non minorée** tend vers $-\infty$.

Attention

Si (u_n) est croissante et majorée par M , elle converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leq M$ (mais pas nécessairement $\ell = M$!).

8. Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

C'est le cœur du programme de 2^{ème} Bac. On étudie une suite (u_n) définie par un premier terme u_{n_0} et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$.

Méthode : Méthode générale — 4 étapes

Étape 1 — Existence : montrer que $u_n \in I$ pour tout n

Par récurrence :

- Vérifier que $u_{n_0} \in I$
- Supposer $u_n \in I$ (hypothèse de récurrence), montrer que $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ (en utilisant $f(I) \subset I$)

Étape 2 — Sens de variation

- Si f est **croissante** sur I : (u_n) est monotone, et son sens est donné par le signe de $u_{n_0+1} - u_{n_0}$ (comparer les deux premiers termes suffit ; démonstration par récurrence)
- Si f est **décroissante** sur I : (u_n) n'est pas monotone en général. On étudie alors les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) séparément, via $f \circ f$ qui est croissante

Étape 3 — Suite bornée

Souvent obtenu directement à l'étape 1 (appartenance à I), parfois nécessite un raisonnement par récurrence supplémentaire.

Étape 4 — Convergence et calcul de la limite

Utiliser les théorèmes de convergence monotone (section 7), puis le théorème du point fixe ci-dessous.

Théorème : Théorème du point fixe

Si (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers un réel ℓ , et f est **continue** en ℓ , alors :

$$\ell = f(\ell)$$

Méthode : Déterminer la limite ℓ

- 1) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I
- 2) Si plusieurs solutions existent, utiliser l'**encadrement** de u_n (obtenu à l'étape 3) pour éliminer les solutions impossibles et identifier la bonne valeur de ℓ

9. Suites de type $v_n = f(u_n)$

Théorème : Limite d'une composée

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ (avec a fini ou infini) et f est continue en a (ou admet une limite b en a), alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a) \quad (\text{ou } b)$$

Cet outil permet de traiter les suites du type $v_n = \sqrt{u_n}$, $v_n = \ln(u_n)$, $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$, etc.

10. Suites particulières**10.1 Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = au_n + b$** **Méthode : Méthode de résolution**

- 1) Chercher le point fixe ℓ tel que $\ell = a\ell + b$ (en supposant $a \neq 1$)
- 2) Poser $v_n = u_n - \ell$. Montrer que (v_n) est une suite **géométrique** de raison a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(u_n - \ell) = av_n$$

- 3) En déduire $v_n = v_{n_0} \cdot a^{n-n_0}$, puis $u_n = v_n + \ell$
- 4) Étudier la limite de u_n selon la valeur de a (cf. limite de q^n , section 6)

10.2 Suites homographiques : $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ **Méthode : Méthode de résolution**

- 1) Chercher le(s) point(s) fixe(s) de $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, solutions de $f(x) = x$
- 2) Si deux points fixes distincts ℓ_1 et ℓ_2 : poser

$$v_n = \frac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}$$

et montrer que (v_n) est géométrique (calculer v_{n+1} en fonction de v_n)

- 3) En déduire v_n explicitement, puis isoler u_n en fonction de v_n
- 4) Étudier la limite de u_n

11. Points de vigilance — erreurs classiques

Erreurs fréquentes à éviter

- Confondre $u_{n+1} - u_n$ (test *arithmétique*) et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (test *géométrique*)
- Oublier de vérifier $u_n \neq 0$ avant de calculer un quotient
- Omettre la **récurrence** pour prouver $u_n \in I$ avant d'exploiter $f(I) \subset I$
- Affirmer $\ell = f(\ell)$ sans avoir justifié la **continuité** de f en ℓ
- Confondre le sens de variation de f et celui de (u_n) lorsque f est décroissante
- Oublier d'éliminer les solutions impossibles de $f(x) = x$ à l'aide de l'encadrement de u_n