□□□□□□□□□□□ Sujet 12 □□□□□□□□□□

Exercice 1

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.
On considère les deux matrices :

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

On considère l'ensemble

$$E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x+\sqrt{3}y\end{pmatrix}\,\middle|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

1/ **a)** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

b) Montrer que (I,J) est une famille libre, puis en déduire la dimension de l'espace vectoriel E.

2/ **a)** Vérifier que $J^2=\sqrt{3}J-I$.

b) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

3/ Soit $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Montrer que $(1,a)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

4/ On considère l'application $\varphi_a:E\to\mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi_a:E\to\mathbb{C},\quad M(x,y)\mapsto x+ay.$$

a) Montrer que φ_a est un isomorphisme de $(E,+)$ vers $(\mathbb{C},+)$.

b) Déterminer les valeurs de a telles que φ_a soit un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{C},\times)$.

c) Posons $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$. Soit $n\in\mathbb{N}$.
Calculer $\varphi_a(J^n)$ en fonction de n, en déduire que :

$$J^n=I\iff n\equiv 0\,[12].$$

Exercice 2

Partie A

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $n \geq 2$. Posons $U_n = \underbrace{55\ldots5}_{n \text{ fois}}$ l'écriture dans la base 7.

1/ Montrer que : $6U_n = 5(7^n - 1)$, en déduire que $U_{n+1} \wedge 7 = 1$.

2/ Montrer que : $U_{n+1} \wedge U_n = 5$.

Partie B

On admet que 2003 est un nombre premier. Soit x un entier naturel tel que : $x^2 + 1 \equiv 0\,[2003]$.

1/ Montrer que : $x^{2003} \equiv -x\,[2003]$.

2/ Montrer que : $x^{2003} \equiv x\,[2003]$, en déduire que $2x \equiv 0\,[2003]$.

3/ Montrer que l'équation : $x^2 + 1 \equiv 0\,[2003]$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\boldsymbol{(E) : 2z^2 + m(1+i)z + m^2(1+i) = 0}$$

1/ **a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left(m(1-3i)\right)^2$.

b) Résoudre l'équation (E).

c) Déterminer la forme algébrique de m tel que : $z_1 \times z_2 = 1$.

d) Dans cette question on suppose que $m = e^{i\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

2/ On considère les points A, B et C respectivement d'affixes

$$\boldsymbol{a = -im, \qquad b = -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}im, \qquad c = -m - \frac{1}{2}mi.}$$

a) Vérifier que :

$$\frac{b-c}{a-c} = i,$$

puis en déduire la nature du triangle ABC.

b) Soit (Γ) l'ensemble des points $M(m)$ du plan,tel que le rayon du cercle

circonscrit au triangle ABC égale $\sqrt{10}$.
Montrer que (Γ) est un cercle de centre O et de rayon 4.

3/ On considère la transformation F qui associe à chaque point $M(Z)$ le point $M'(Z')$ tel que :

$$\boldsymbol{Z' = 2iZ - m(2+i)}$$

a) Déterminer la nature de F.

b) Déterminer l'image du cercle (Γ) par F.

Exercice 4

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\boldsymbol{f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}, \text{ si } x > 0.}$$

1/

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : (x+1)e^{-x} - 1 < 0$.

c) En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$.

2/ Soit F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : F_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!}\int_0^x t^n e^t \, dt \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : F_n(x) = x - 1 + e^{-x}$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : F_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x}, \quad F_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x}.$$

3/ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \dfrac{-x}{2} \leq f(x) - 1 \leq \dfrac{-x}{2} + \dfrac{x^2}{6}$.

Partie II

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(0)=1 \quad \text{et} \quad F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \text{ si } x>0.$$

1/

a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+ : 1-\frac{x}{4}\leq F(x)\leq 1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{18}$.

b) En déduire que F est continue et dérivable à droite en 0 et préciser $F'_d(0)$.

2/

a) Montrer que : $\forall x\in[1,+\infty[: 0\leq F(x)\leq \frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement cette limite.

3/

a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+ : F'(x)=\frac{f(x)-F(x)}{x}.$$

b) Montrer que F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4/ Construire la courbe (C_F) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie III

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$\boldsymbol{I_n=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+(1+e^x)^n}\,dx.}$$

1/

a) Calculer l'intégrale I_0.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N} : I_n+I_{n+1}=f(n)$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2/ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, on pose :

$$\boldsymbol{S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k f(k).}$$

a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R} : \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k e^{-kx}=\frac{(-1)^{n-1}e^x}{e^{nx}(1+e^x)}-\frac{1}{1+e^x}$.

b) Justifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\} : S_n=(-1)^{n-1}I_n+\ln\left(\frac{1+e}{2e}\right)$.

c) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est convergente en précisant sa limite.

FIN