Sujet 13

Exercice 1

On munit l'ensemble $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de deux lois de composition internes $\star$ et $\perp$ définies par :

$$(\forall (x,y) \in I^2) \quad x \star y = \arctan\big(\tan(x) + \tan(y)\big)$$
$$(\forall (x,y) \in I^2) \quad x \perp y = \arctan\big(\tan(x) \cdot \tan(y)\big)$$

1/ **a)** Montrer que $\star$ est commutative et associative sur I.

b) Montrer que $(I, \star)$ est un groupe commutatif.

2/ Montrer que $\perp$ est distributive par rapport à $\star$ dans I.

3/ On considère l'application :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan(x)$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(I, \perp)$ dans $(\mathbb{R}, \times)$.

b) En déduire que $(I, \star, \perp)$ est un corps commutatif.

4/ Montrer que $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right\}$ est un sous-groupe de $(I^*, \perp)$ avec $I^* = I - \{0\}$.

Exercice 2

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.
Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969}$

1/ On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n.

a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que :
$(\exists u \in \mathbb{Z}) : u \times n \equiv 1\,[2969]$

b) En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1\,[2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1\,[2969]$
(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)

c) Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

d) En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1\,[2969]$.

2/ **a)** En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n.

b) Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969} \iff n \equiv 0\,[2969]$ et $m \equiv 0\,[2969]$.

Exercice 3

Partie A

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

1/ Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

2/ Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.

3/ En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Partie B

On note E l'équation à valeurs dans $\mathbb{C}$: $z + \bar{z} = |z|$.

1/ Montrer que pour résoudre E, il suffit de déterminer $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 1$ (E')

2/ Déterminer les solutions de (E') puis les solutions de (E).

Partie C

Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx) \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx).$$

(On rappelle que $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$)

1/ Montrer que $iA_n + B_n = (1 + e^{ix})^n$.

2/ Déduire les expressions de A_n et B_n.

Exercice 4

Partie I :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x \cdot e^{-x}$.
Et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. Puis interpréter géométriquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x}$. Puis en déduire que (C_g) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

2/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\quad g'(x) = (1 - x) \cdot e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de g en justifiant la réponse.

3/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\quad g''(x) = (x - 2) \cdot e^{-x}$ puis étudier la concavité de (C_g) et déterminer son point d'inflexion.

4/ Construire (C_g) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5/ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $A(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} g(x)\, dx$.

a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\quad g(x) + 2g'(x) + g''(x) = 0$. Puis en déduire qu'une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction $G : x \mapsto -2g(x) - g'(x)$.

b) Exprimer $A(\lambda)$ en fonction de λ, puis calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$ et interpréter le résultat géométriquement.

6/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\boldsymbol{S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} k \cdot \sqrt[2n]{e^{-k}}}$.

Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\quad S_n = \dfrac{2}{n} \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} g\left(\frac{k}{2n}\right)$. Puis en déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.

Partie II :

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{F(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{g(t)}{1 + e^{-t}}\, dt; \quad \text{si } x \neq 0.}$$

1/ **a)** En utilisant une intégration par changement de variable, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); \quad \int_0^{-x} \frac{g(t)}{1 + e^{-t}}\, dt = \int_0^{x} \frac{u}{1 + e^{-u}}\, du.$$

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\quad F(-x) = 1 - F(x)$.

2/ a) Vérifier que : $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$; $\quad 0 \leq g(t) \leq e^{-1}$. Puis en déduire que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \quad 0 \leq F(x) \leq \frac{2e^{-1}}{x}.$$

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$. Puis en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ en justifiant la réponse.

3/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \quad F'(x) = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{1+e^x} - F(x)\right).$$

4/ a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, en utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$F(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+e^t}\right)^2 e^t\, dt.$$

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $\quad F'(x) = \dfrac{-2}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{h(t)}\right)^2 dt.$

Où h est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $h(t) = e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}$.

5/ a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $\quad \dfrac{x^3}{3(h(x))^2} \leq \displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{h(t)}\right)^2 dt \leq \frac{x^3}{12}.$

(Ind. : Remarquez que h est croissante sur $\mathbb{R}_+$.)

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $\quad \dfrac{-1}{6} \leq F'(x) \leq \dfrac{-2}{3(h(x))^2}.$

6/ a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $\quad \dfrac{1}{1+e^x} \leq F(x) \leq \dfrac{1}{1+e^x} + \dfrac{x}{3}.$

(Ind. : Utiliser la question 4) a) de la partie II.)

b) En déduire que F est continue à droite en 0.

7/ Montrer que F est dérivable en 0 et que : $F'(0) = \dfrac{-1}{6}$.

(Ind. : On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à F.)

8/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $F(x) = n \cdot x$ admet une solution unique a_n dans $\mathbb{R}$ et justifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\quad a_n > 0$.

9/ Justifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, puis montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

10/ Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \cdot a_n = \dfrac{1}{2}$. Puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(n \cdot a_n - \dfrac{1}{2}\right)$.

FIN