



GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Produit scalaire dans l'espace



1 Bac SM

S. EL JAAFARI

Table des matières

I - Produit scalaire dans l'espace

- 1 - Définition et notation
- 2 - Orthogonalité de deux vecteurs
- 3 - Symétrie et bilinéarité du produit scalaire
- 4 - Norme d'un vecteur de l'espace

II- Etude analytique du produit scalaire

- 1 - Base orthonormale - Repère orthonormal
- 2 - Expression analytique du produit scalaire
- 3 - L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$

III- Plan défini par un point et un vecteur normal

- 1 - Vecteur normal à un plan
- 2 - Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal
- 3 - Parallélisme et orthogonalité de plans
- 4 - Distance d'un point à un plan de l'espace

IV- La sphère dans l'espace

- 1 - Définition
- 2 - Equation cartésienne d'une sphère
- 3 - Représentation paramétrique d'une sphère
- 4 - Ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
- 5 - Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
- 6 - Intersection d'une sphère et d'une droite
- 7 - Intersection d'une sphère et d'un plan

I- Produit scalaire dans l'espace

1- Définition et notation

définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Le **produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace** est le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans tout plan contenant les points A, B et C, on le note aussi $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ par convention on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

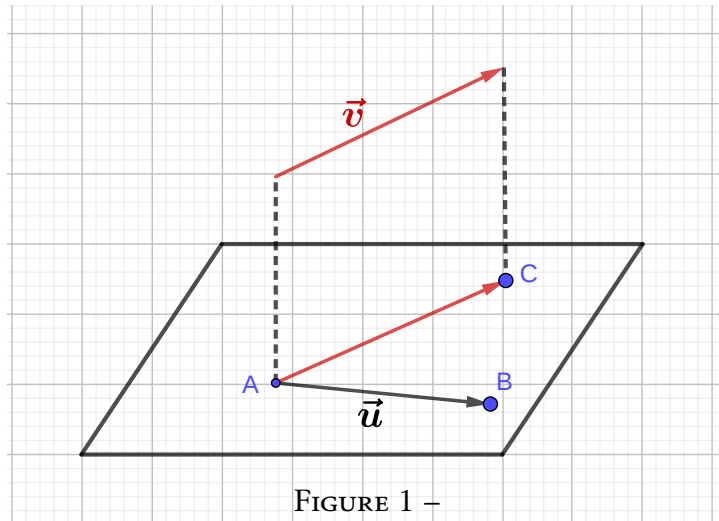


FIGURE 1 –

Remarques :

Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont **des sens contraires**, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.
- Si les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont **de même sens**, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$.

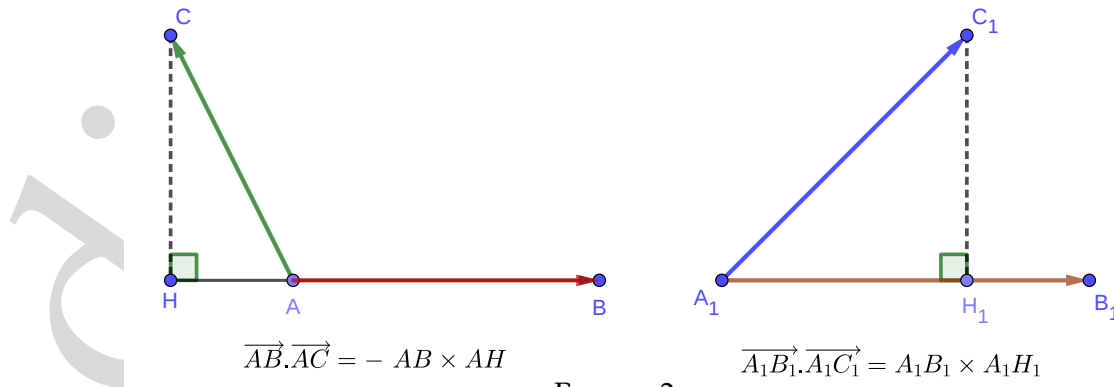


FIGURE 2 –

2- Orthogonalité de deux vecteurs

définition :

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$ si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3- Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ et k un nombre réel. Alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- On dit que le produit scalaire est une opération **symétrique et bilinéaire**.

4- Norme d'un vecteur de l'espace

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

- Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ s'appelle **le carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ c'est un nombre réel positif qu'on note $\vec{u}^2$.
- Le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u}^2}$ est appelé **la norme du vecteur** $\vec{u}$ et on écrit : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.

Remarques

En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on a : $\vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = \|\vec{u}\|^2$

Proposition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ et k un nombre réel. Alors :

- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ **Inégalité triangulaire**.
- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ **Inégalité de Cauchy-Schwarz**.
- **Identités remarquables :**
$$\begin{cases} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \end{cases}$$

II- Étude analytique du produit scalaire

1- Base orthogonale - Repère orthogonal

Définition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthogonale** si, et seulement si $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.
- La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormale** si, et seulement si $\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$
- Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthogonal** si, et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale.
- Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormal (ou orthonormé)** si, et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormale.

2- Expression analytique du produit scalaire

Proposition 1 :

Dans l'espace $\mathcal{V}_3$ rapporté à une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
on considère les vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$. Alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Proposition 2 :

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
on considère les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

3- L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$

Proposition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul et A un point et k un nombre réel.

L'ensemble des point $M(x, y, z)$ de l'espace $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est un plan dont une équation cartésienne est : $ax + by + cz + d = 0$.

III- Plan défini par un point et un vecteur normal

1- Vecteur normal à un plan

Définition

Soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace et $(\mathcal{P})$ un plan.

On dit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ si, et seulement si toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

2- Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

Proposition :

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

- Tout plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a une équation cartésienne de la forme : $ax + by + cz + d = 0$
- Inversement, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

3- Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

Proposition :

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ et soit $(\mathcal{D})$ une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors :

- $(\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}') \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
- $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$.
- $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$.
- $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

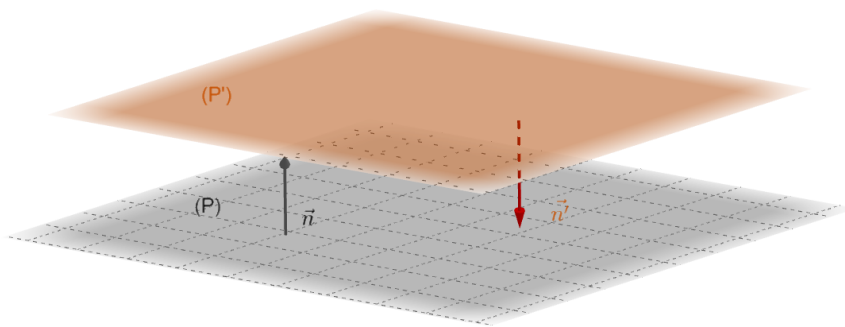
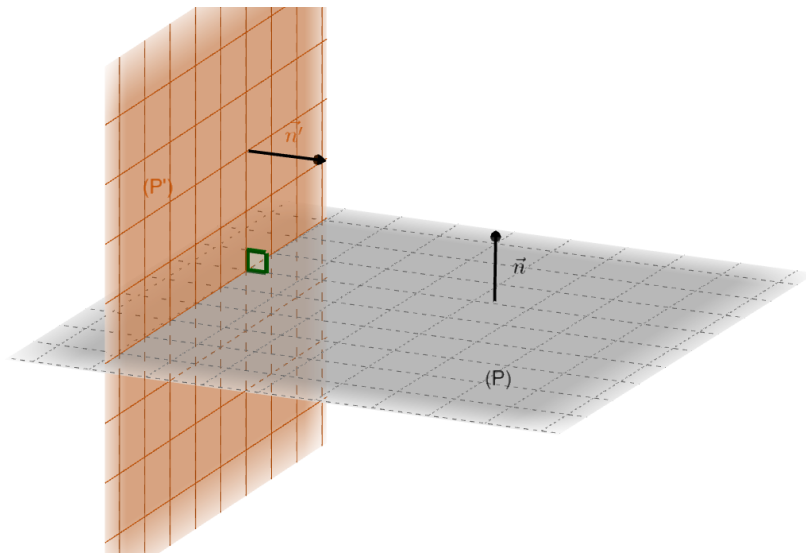


FIGURE 3 – $(\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}')$

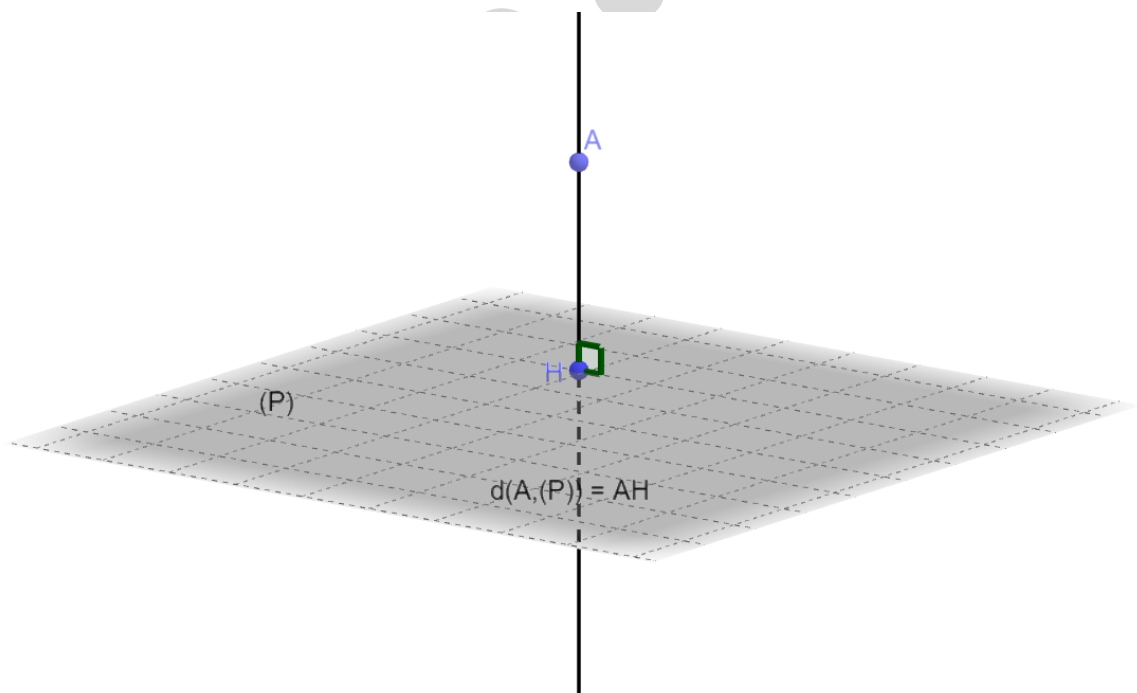
FIGURE 4 – $(P) \perp (P')$

4- Distance d'un point à un plan de l'espace

Définition :

Soit (P) un plan et A un point de l'espace.

La distance du point A au plan (P) notée $d(A, (P))$ est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur (P) : $d(A, (P)) = AH$.

FIGURE 5 – $d(A, (P)) = AH$

Proposition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et (P) un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Alors :

$$d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

IV- La sphère dans l'espace

1- Définition

Définition :

Soit Ω un point de l'espace et R un nombre réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.

On la note $(S)(\Omega, R)$.

En plus si A et B sont deux points de la sphère $(S)(\Omega, R)$, on dit que le segment $[AB]$ est un diamètre de la sphère $(S)(\Omega, R)$ si le centre Ω est le milieu du segment $[AB]$.

2- Équation cartésienne d'une sphère

Proposition :

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé, on considère un point $\Omega(a, b, c)$ et R un nombre réel positif.

Une équation cartésienne de la sphère $(S)(\Omega, R)$ est donnée par :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

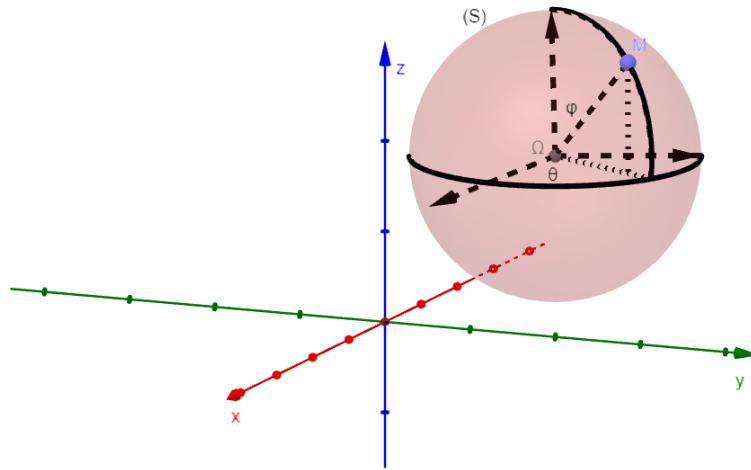
3- Représentation paramétrique d'une sphère

Proposition :

Soit (S) la sphère de centre un point $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R.

$$\bullet \quad M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + R \sin \varphi \cos \theta \\ y = b + R \sin \varphi \sin \theta \\ z = c + R \cos \varphi \end{cases}$$

• Le système précédent est appelé **une représentation paramétrique** de la sphère (S) .

FIGURE 6 – $\mathcal{S}(\Omega, R)$

4- Ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Proposition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des nombres réels. Alors :

- Si $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, alors (S) est la sphère de centre le point $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.
- Si $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$, alors $(S) = \{\Omega(a, b, c)\}$.
- Si $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$, alors $(S) = \emptyset$.

5- Ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Proposition :

Soient A et B deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$.

- L'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.
- Une équation cartésienne de la sphère (S) est donnée par :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

6- Intersection d'une sphère et d'une droite

Proposition :

Soit $(S)(\Omega, R)$ une sphère et $((D))$ une droite de l'espace $\mathcal{E}$.

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $((D))$ et $d = d(\Omega, ((D)))$.

- si $d > R$, alors $((D)) \cap (S) = \emptyset$. On dit dans ce cas que la droite $((D))$ est à l'**extérieur** de la sphère (S) .
- Si $d = R$, alors $((D)) \cap (S) = \{H\}$. On dit dans ce cas que la droite $((D))$ est **tangente** à la sphère (S) au point H .
- Si $d < R$, alors $((D)) \cap (S) = \{A, B\}$. On dit dans ce cas que la droite $((D))$ **perce** la sphère (S) aux deux points A et B .

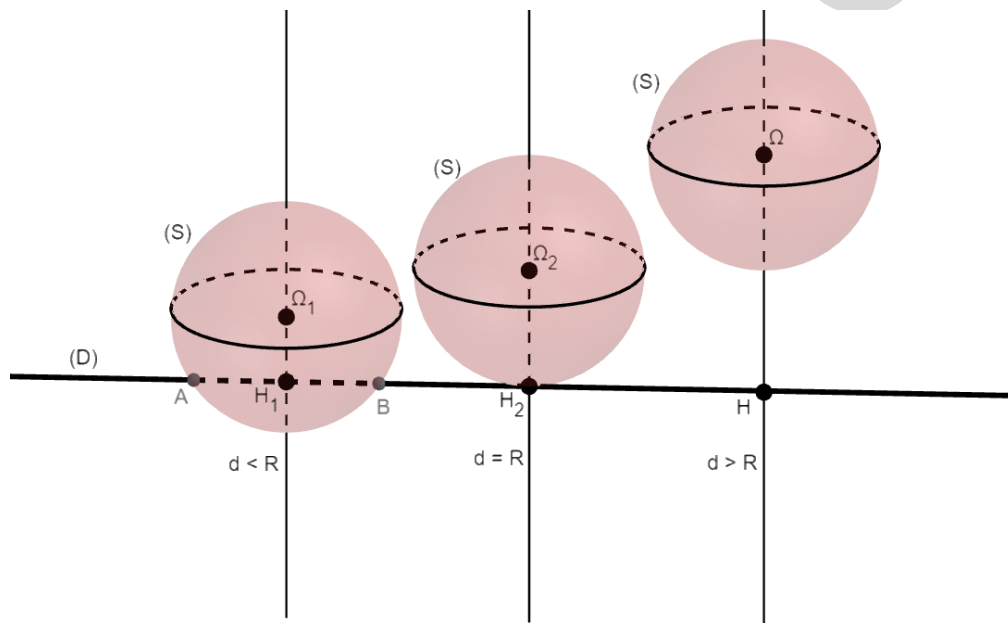


FIGURE 7 – $(S) \cap (D)$

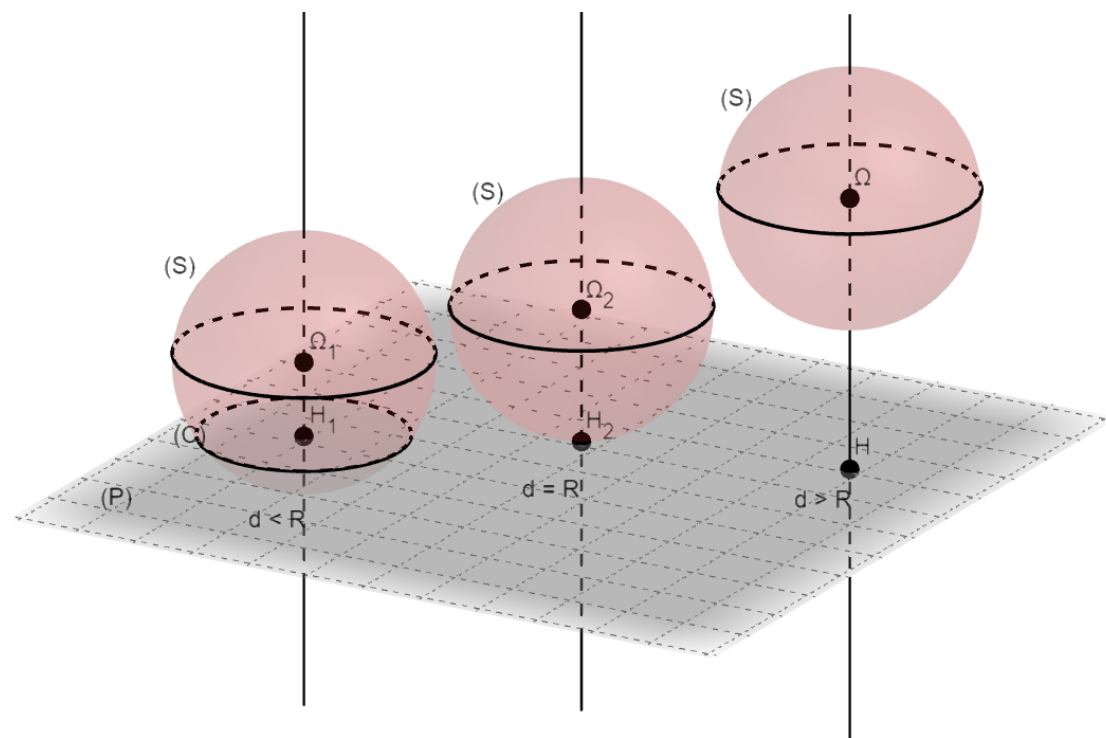
7- Intersection d'une sphère et d'un plan

Proposition :

Soit $(S)(\Omega, R)$ une sphère et $((P))$ un plan de l'espace $\mathcal{E}$.

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $((P))$ et $d = d(\Omega, ((P)))$.

- si $d > R$, alors $((P)) \cap (S) = \emptyset$. On dit dans ce cas que le plan $((P))$ est à l'**extérieur** de la sphère (S) .
- Si $d = R$, alors $((P)) \cap (S) = \{H\}$. On dit dans ce cas que le plan $((P))$ est **tangent** à la sphère (S) au point H .
- Si $d < R$, alors $((P)) \cap (S) = (C)$ où (C) est le cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. On dit dans ce cas que le plan $((P))$ **coupe la sphère** (S) selon le cercle $(C)(H, \sqrt{R^2 - d^2})$.

FIGURE 8 – $(S) \cap (P)$