



GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Étude analytique de l'espace



1 Bac SM

S. EL JAAFARI



Table des matières

I - Coordonnées d'un point et d'un vecteur

- 1 - Base et repère de l'espace
- 2 - Coordonnées d'un point dans un repère de l'espace $\mathcal{E}$
- 3 - Coordonnées d'un vecteur dans une base de l'espace $\mathcal{V}_3$

II - Condition de colinéarité et de coplanarité de vecteurs

- 1 - Condition de colinéarité de deux vecteurs
- 2 - Condition de coplanarité de trois vecteurs

III - Etude analytique d'une droite de l'espace

- 1 - Représentation paramétrique d'une droite
- 2 - Equations cartésiennes d'une droite

IV - Etude analytique d'un plan de l'espace

- 1 - Représentation paramétrique d'un plan
- 2 - Equation cartésienne d'un plan

V - Positions relatives de droites et plans de l'espace

- 1 - Positions relatives de deux droites
- 2 - Positions relatives d'une droite et d'un plan
- 3 - Positions relatives de deux plans



I- Coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur

1- Bases et repère de l'espace

Définition :

Soient $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace $\mathcal{V}_3$ et O un point de l'espace $\mathcal{E}$.

- Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé **une base de l'espace** $\mathcal{V}_3$.
- Le quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé **un repère de l'espace** $\mathcal{E}$.

Remarques :

- Quatre points non coplanaires de l'espace O, A, B et C déterminent un repère de l'espace.
- $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère de l'espace $\mathcal{E}$.

2- Coordonnées d'un point dans un repère de l'espace

Théorème et définition :

Soit $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$.

- Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$ il existe un triplet (x, y, z) de nombres réels tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$
- Le triplet (x, y, z) est appelé **triplet de coordonnées** du point M dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.
- x est l'**abscisse** du point M , y est l'**ordonnée** du point M , z est la **cote** du point M et on note

$$M(x; y; z) \text{ ou } M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

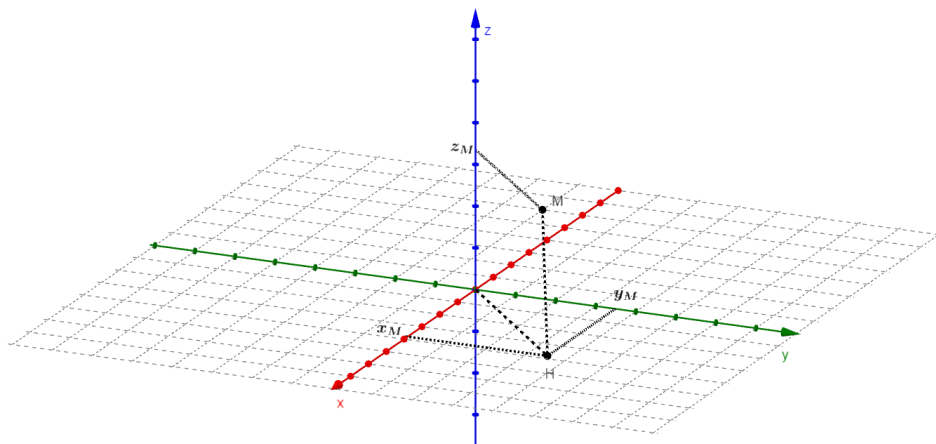


FIGURE 1 –

3- Coordonnées d'un vecteur dans une base de l'espace

Théorème et définition :

L'espace $\mathcal{V}_3$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace $\mathcal{V}_3$ il existe un triplet (x, y, z) unique de $\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- Le triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ est appelé **le triplet de coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- **x est l'abscisse** du vecteur $\vec{u}$, **y est l'ordonnée** du vecteur $\vec{u}$, **z est la cote** du vecteur $\vec{u}$
et on note $\vec{u}(x, y, z)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Proposition :

- Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{V}_3$.
 - $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \{x = x' \text{ et } y = y' \text{ et } z = z'\}$
 - Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x', y + y', z + z')$.
 - Pour tout réel α , les coordonnées du vecteur $\alpha\vec{u}$, sont $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.
- Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 - Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
 - Les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$ sont ; $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

II- Colinéarité et coplanarité des vecteurs de l'espace

1- Condition de colinéarité de deux vecteurs

Définition :

Soient $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les nombres réels $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = bc' - b'c$ s'appellent **les déterminants extraits** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Proposition :

Soient $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si Les nombres réels $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \Delta_3 = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0.$$

2- Condition de coplanarité de trois vecteurs de l'espace

Définition :

Soient $\vec{u}(a, b, c)$, $\vec{v}(a', b', c')$ et $\vec{w}(a'', b'', c'')$ trois vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre est le nombre réel, noté $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$\text{défini par : } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

Proposition :

Soient $\vec{u}(a, b, c)$, $\vec{v}(a', b', c')$ et $\vec{w}(a'', b'', c'')$ trois vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

III- Étude analytique d'une droite de l'espace

1- Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Théorème et définition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ de $\mathcal{E}$ et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite (D) passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ si, et

$$\text{seulement si : } \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ce système est appelé **une représentation paramétrique** de la droite (D) .

Remarques :

- Chaque droite de l'espace possède une infinité de représentations paramétriques.
- Une représentation paramétrique d'une demi-droite est la même que celle d'une droite sauf pour les valeurs prises par le paramètre t, on le prendra dans l'un des intervalles $[\alpha, +\infty[$, $]\alpha, +\infty[$, $]-\infty, \alpha]$, $]-\infty, \alpha[$.
- Pour une représentation paramétrique d'un segment, on prendra t dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

2- Équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

Définition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (D) la droite passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$.

- Si $abc \neq 0$, le système : $\frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$ est appelé **équations cartésiennes** de la droite (D) .

- Si $ab \neq 0$ et $c = 0$, le système $\begin{cases} \frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} \\ z - z_A = 0 \end{cases}$ est appelé **équations cartésiennes** de la droite (D) .

- Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, le système $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$ est appelé **équations cartésiennes** de la droite (D) .

IV- Étude analytique d'un plan de l'espace

1- Représentation paramétrique d'un plan

Théorème et définition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P) la plan passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$.

- $M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \exists (t, k) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = x_A + at + a'k \\ y = y_A + bt + b'k \\ z = z_A + ct + c'k \end{cases}$.
- Le système $\begin{cases} x = x_A + at + a'k \\ y = y_A + bt + b'k \\ z = z_A + ct + c'k \end{cases} \quad (t, k) \in \mathbb{R}^2$ est appelé **une représentation paramétrique** du plan (P) .

Remarque :

Chaque plan de l'espace possède une infinité de représentations paramétriques.

2- Équation cartésienne d'un plan

Théorème et définition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P) la plan passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$.

- $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ où
 $a = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}; b = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}; c = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}; d = -(ax_A + by_A + cz_A)$
- L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée **une équation cartésienne** du plan (P) .

Remarques :

- Tout plan de l'espace possède une infinité d'équations cartésiennes.
- Soient A, B et C trois points de l'espace. Alors une équation du plan (ABC) est donnée par :
 $M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$
- Si l'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 - Une équation cartésienne du plan $P_1(O; \vec{i}, \vec{j})$ est $z = 0$.
 - Une équation cartésienne du plan $P_2(O; \vec{j}, \vec{k})$ est $x = 0$
 - Une équation cartésienne du plan $P_3(O; \vec{i}, \vec{k})$ est $y = 0$

V- Positions relatives des droites et des plans dans l'espace

1- Positions relatives de deux droites

Proposition :

Soient $(D) = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $(D') = \mathcal{D}(B, \vec{v})$ deux droites de l'espace.

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $\{A \in (D') \text{ ou } B \in (D)\}$, alors les droites (D) et (D') sont confondues.
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A \notin (D')$, alors les droites (D) et (D') sont strictement parallèles.
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, alors les droites (D) et (D') sont sécantes.
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, alors les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

2- Position relative d'une droite et d'un plan

Proposition 1 :

Soient $(D) = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ une droite et $(P) = \mathcal{P}(B, \vec{v}, \vec{w})$ un plan de l'espace $\mathcal{E}$.

- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ et $A \in (P)$, alors $(D) \subset (P)$
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ et $A \notin (P)$, alors la droite (D) est strictement parallèle au plan (P).
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ alors la droite (D) coupe le plan (P) en un seul point.

Proposition 2 :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère une droite (D) passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, et un plan (P) d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Alors :

$$(D) \parallel (P) \Leftrightarrow a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

3- Position relative de deux plans

Proposition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient (P) et (P') deux plans de l'espace définis par leur équation cartésienne : (P) : $ax + by + cz + d = 0$ et (P') : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Alors :

$$(P) \parallel (P') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$$

En particulier, si $abc \neq 0$, alors :

$$(P) \parallel (P') \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Remarque :

Les plans (P) et (P') ne sont pas parallèles $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \left| \begin{smallmatrix} b & c \\ b' & c' \end{smallmatrix} \right| \neq 0 \text{ ou } \left| \begin{smallmatrix} a & c \\ a' & c' \end{smallmatrix} \right| \neq 0 \text{ ou } \left| \begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix} \right| \neq 0 \end{array} \right)$

